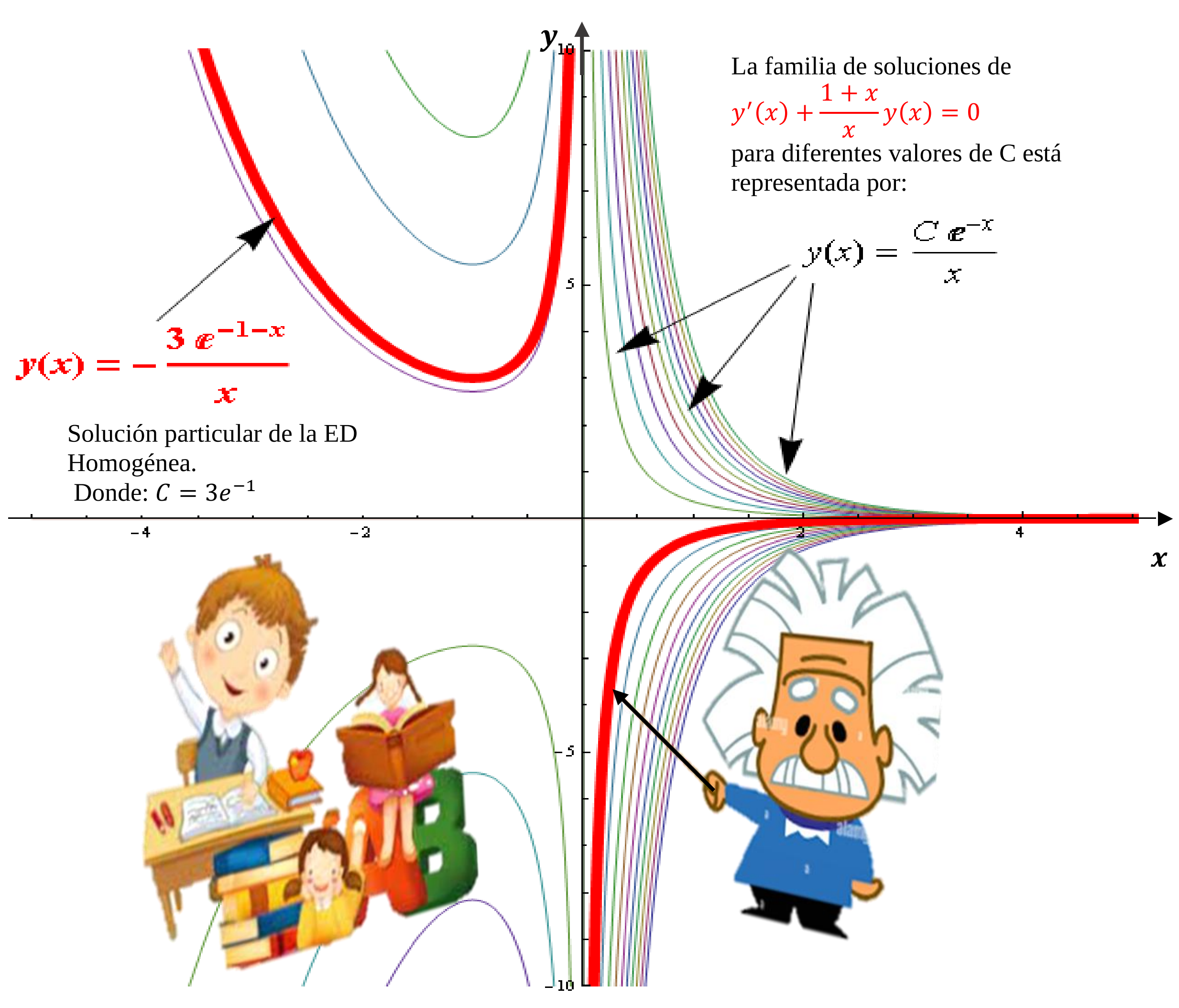
Solucionario de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones.



Proyecto de grado

Danilo Palacio Palacio

Bocas del Toro



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE BOCAS DEL TORO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

"***SOLUCIONARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y APLICACIONES*** "

ESTUDIANTE: DANILO PALACIO PALACIO

PARA OPTAR

LICENCIATURA EN DOCENCIA DE MATEMÁTICA

CÉDULA: 12-707-2005

PROFESOR ASESOR: SANTIAGO SAMUDIO

REPÚBLICA DE PANAMÁ

2024

Índice

Contenido

Índice de Tablas

índice de Figuras

Introducción

Las ecuaciones que suelen utilizar los estudiantes son en gran parte por la necesidad de obtener valores numéricos de determinadas magnitudes. Pero en las aplicaciones matemáticas, a menudo surge una gran clase de problemas de diferente naturaleza; problemas en los que la propia incógnita es una función. Obtenemos así ecuaciones funcionales cuyas propiedades son generalmente muy diversas.

Ahora consideraremos las clases de ecuaciones más comunes e importantes para determinar tales funciones: las llamadas ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, ecuaciones para las cuales, además de la función desconocida, surgen derivadas de diferentes órdenes.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias desempeñan un papel fundamental en la modelización y comprensión de una amplia gama de fenómenos en diversos campos científicos y de ingeniería. Estas ecuaciones capturan relaciones dinámicas que involucran tasas de cambio y evolución en sistemas que varían con respecto a una única variable independiente. Desde el crecimiento de poblaciones hasta la dinámica de fluidos, pasando por la mecánica cuántica y la ingeniería de control, las EDO ofrecen herramientas poderosas para analizar y predecir comportamientos complejos.

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación matemática que involucra una función desconocida y sus derivadas con respecto a una variable independiente. En una EDO, la función desconocida depende de una sola variable independiente. La ecuación establece una relación entre la función desconocida y sus derivadas en diferentes puntos de la variable independiente. Para afrontar este curso los alumnos deben tener conocimientos sólidos en cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo de varias variables.

Este trabajo está constituido en tres capítulos

Capítulo 1: Describe la problemática, que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales. De acuerdo con la experiencia en la Licenciatura de Docencia en Matemática, con el curso de Ecuaciones Diferenciales, los estudiantes pueden tener dificultades con las ecuaciones diferenciales por varias razones: falta de comprensión conceptual, dificultad para seleccionar el método adecuado, manejo de la notación y terminología, dificultad para resolver problemas prácticos, entre otras. El objetivo de este trabajo es desarrollar un solucionario detallado de ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones, con el fin de proporcionar una herramienta efectiva para el aprendizaje y la práctica de la resolución de estos tipos de ecuaciones.

Capítulo 2: Se describe el marco teórico, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: clasificaciones, definiciones, métodos de solución, teoremas y problemas de aplicaciones. Por otro lado, como destaca Arnold en su obra "Ordinary Differential Equations", "la teoría de las ecuaciones diferenciales es uno de los pilares de la matemática aplicada y permite describir la dinámica de sistemas físicos y biológicos, la propagación de ondas y muchas otras cosas".

La historia es esencial, por esta razón, las ecuaciones diferenciales ordinarias también han sido objeto de estudio de destacados matemáticos como Newton, Euler, Lagrange y Leibniz, entre otros, y han sido utilizadas para resolver problemas en campos tan diversos como física, biología, economía e ingeniería. Por lo tanto, gracias a los matemáticos que aportaron a esta rama de la Matemática, existen diversas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, que incluyen la separación de variables, la integración directa, la sustitución, entre otras.

Capítulo 3: En esta sección los problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias están desarrollados por distintos métodos que son: ecuaciones diferenciales de variables separables, ecuaciones diferenciales homogéneas, ecuaciones diferenciales exactas, métodos de agrupación para ED exactas, método por el factor integrante, ecuaciones lineales de primer orden, método por variación de parámetros, ecuaciones diferenciales de Bernoulli y ecuaciones diferenciales de Ricatti. También, se desarrolló problemas de aplicaciones como: trayectorias ortogonales y problemas de mezclas.

Este documento tiene la finalidad de brindarles a los estudiantes universitarios de Bocas del Toro y la comunidad educativa, un solucionario que proporciona soluciones detalladas, explicaciones y diferentes métodos de solución, resultando ser una herramienta valiosa para los alumnos y docentes.

Capítulo I Planteamiento de problema

1.1 Antecedentes

1.1.1 Aspectos generales del problema

Un **solucionario** es un recurso que proporciona las soluciones detalladas y explicaciones paso a paso de problemas o ejercicios planteados en un libro de texto, guía de estudio o cualquier otro material educativo. El solucionario tiene el propósito de ayudar a los estudiantes a comprender y resolver los problemas por sí mismos, proporcionándoles una guía adicional.

A continuación, fragmentos de trabajos sobre ecuaciones diferenciales.

Un primer trabajo de Melgar Brizuela (2004) con el título: Resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales, un enfoque heurístico. La comunidad internacional de matemáticos y educadores concluye que la resolución de problemas es la actividad matemática más crucial para el desarrollo de la inteligencia. Esto implica cultivar la capacidad de establecer relaciones, afrontar situaciones nuevas y adquirir conocimiento de manera aplicable, en lugar de simplemente acumular información. (p.9)

Un segundo trabajo de Cabrera (2009) con el título: Solucionario de problemas de ecuaciones diferenciales. Es un solucionario en la cual se resuelven muchos problemas de ecuaciones diferenciales y con la aplicación de fórmulas, para que los estudiantes tengan una base sólida en la misma.

Un tercer trabajo de Zang, C. M., Fernández Von Metzen, G. A., & León, M. N. (2021):

Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales.

Este estudio analiza las respuestas de estudiantes de ingeniería al resolver ecuaciones diferenciales dentro de un campo direccional para comprender cómo aplican y manifiestan sus conocimientos.

Se destaca la importancia del análisis de errores como herramienta para los docentes, revelando cómo los estudiantes interpretan los problemas y emplean diferentes métodos. Los análisis revelaron dificultades para comprender información a través de métodos cualitativos, como gráficos, y una preferencia por soluciones analíticas. (p. 83)

Varios autores han abordado las dificultades de aprendizaje en matemática, particularmente en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Se ha propuesto la creación de un "Solucionario de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones" para ofrecer soluciones detalladas, explicaciones y diversos métodos de resolución, lo cual puede beneficiar a los estudiantes en el desarrollo de habilidades efectivas para resolver problemas en este campo.

1.1.2 Alcance y limitación

1. 1.2.1 Alcance.

Este proyecto, titulado "Solucionario de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones", está diseñado para estudiantes universitarios que están cursando la asignatura de ecuaciones diferenciales como parte del plan de estudios de la Licenciatura en Docencia de Matemática.

1. 1.2.2 Limitaciones.

Las limitaciones en el proyecto son las siguientes:

- No tener una computadora (pc) en buen estado para la elaboración del proyecto "Solucionario".
- Factor económico, en la reproducción del documento.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

- Desarrollar un solucionario detallado de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones, con el fin de proporcionar una herramienta efectiva para el aprendizaje y la práctica de la resolución de este tipo de ecuaciones para estudiantes y docentes.

1.2.2 Objetivos específicos

- Desarrollar un solucionario de 280 problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones, que cubra un amplio rango de temas y técnicas.
- Diseñar el solucionario para que sea una herramienta efectiva de aprendizaje y práctica, con ejercicios de práctica con diferentes niveles de dificultad y soluciones paso a paso que expliquen los razonamientos y técnicas utilizadas.
- Incluir aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales sobre trayectorias ortogonales y problemas de mezclas, con el fin de mostrar la utilidad y la relevancia de las ecuaciones diferenciales en situaciones reales.

1.3 Justificación

Hacer un solucionario de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones es una actividad valiosa.

Ayudará a los estudiantes a comprender mejor los conceptos, al proporcionar soluciones detalladas paso a paso a los problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los estudiantes pueden comprender mejor los conceptos y técnicas utilizados para resolver estas ecuaciones.

Fomenta la práctica y el aprendizaje activo. Al tener acceso a un solucionario, los estudiantes pueden practicar resolviendo problemas por su cuenta y verificar sus respuestas. Esto fomenta un aprendizaje significativo y ayuda a los estudiantes a comprender mejor el material.

Proporciona una fuente de recursos para los profesores, ya que pueden utilizar un solucionario de ecuaciones diferenciales ordinarias para diseñar actividades y tareas. También pueden utilizar el solucionario para verificar las respuestas de los estudiantes y proporcionar retroalimentación adicional.

Sánchez Pineda (1994) comenta que:

Otro aspecto de importancia que puede ayudar a motivar al alumno acerca del aprendizaje de resolución de problemas lo constituye la visión histórica del desarrollo matemático. La cual busca que los alumnos aprendan matemáticas, será interesante introducirlo a pasajes destacados de la historia de la formación de los conceptos matemáticos. El profesor no debe perder la oportunidad de relacionar los ejercicios de aplicación con aspectos históricos que influyeron en su generación. (p.18)

Capítulo II Marco teórico

2.1 Historia de las ecuaciones diferenciales

2.1.1 Desarrollo histórico del estudio de ecuaciones diferenciales

Desde la antigüedad, comprender el movimiento de objetos ha sido crucial para la humanidad, especialmente en la predicción de eventos astronómicos como los eclipses lunares, que tienen un significado religioso. La habilidad de los astrónomos para predecir con precisión estos fenómenos aumenta su credibilidad, lo que requiere un profundo conocimiento del movimiento de las estrellas, particularmente del movimiento lunar en momentos específicos.

¿Cómo estos fenómenos están relacionados con la ecuación diferencial?

El movimiento lunar y la predicción de eclipses están vinculados a ecuaciones diferenciales debido a la naturaleza dinámica de estos fenómenos. Estas ecuaciones modelan cómo las posiciones y velocidades de los cuerpos celestes cambian con el tiempo, siendo esenciales para la predicción precisa de eventos astronómicos como los eclipses.

Movimiento de la Luna:

El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra ilustra una aplicación clave de ecuaciones diferenciales, donde las leyes de Newton y del movimiento revelan su constante cambio de posición y velocidad debido a la gravedad terrestre y otros cuerpos celestes. Estas ecuaciones modelan esta interacción gravitatoria y otros factores, permitiendo la predicción precisa de la órbita lunar en el tiempo. Resolverlas proporciona datos cruciales para diversas aplicaciones astronómicas y de navegación.

Predicción de eclipses:

Los eclipses, solares o lunares, resultan de alineaciones específicas entre la Tierra, la Luna y el Sol en el espacio. Para predecir estos eventos, se necesita un conocimiento exacto de las posiciones y trayectorias de estos cuerpos celestes. Las ecuaciones diferenciales son fundamentales para

modelar el movimiento orbital de la Tierra y la Luna, permitiendo determinar cuándo ocurrirán las alineaciones necesarias para los eclipses.

2.1.2 Orígenes de las ecuaciones diferenciales

Como lo destaca Zill (1986):

Sería una lástima que un estudiantes pase por un curso como éste (tal como algunos lo hacen) sin conocer, aunque sea un poco, los orígenes de esta materia. En la discusión que sigue se verá cómo ecuaciones diferenciales específicas aparecen no sólo a partir de las familias de curvas geométricas, sino también del intento de describir, términos matemáticos, problemas físicos en ciencias e ingeniería. No sería nada presuntuoso afirmar que las ecuaciones diferenciales son la piedra angular de disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica, e incluso proporcionan un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía. (p.12)

Por la riqueza histórica y desarrollo de esta hermosa materia, mencionaremos destacados matemáticos y sus aportes a la misma.

Isaac Newton (siglo XVII). Físico y matemático de origen británico es aclamado por muchos como el científico más grande e influyente de todos los tiempos. En el tema de Ecuaciones Diferenciales, Newton trabajó con algunas ecuaciones de primer orden, las cuales clasifico en tres tipos:

- El primer tipo consistía en ecuaciones en las cuales la derivada es una función de una sola variable, x o y. Por ejemplo, $y = f(x)$, $y = f(y)$, donde $y = y'(x)$.

- El segundo tipo, eran ecuaciones en las cuales las derivadas es una función que depende de dos variables x, y. Por ejemplo, $g = f(x, y)$, donde $y = y'(x)$.
- El tercer tipo estaba formado por ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Por ejemplo, $u = f(x, y)$, donde $u = u(x, y)$, $u = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Gottfried Leibniz (siglo XVII). Fue un matemático, filósofo y científico alemán que hizo importantes contribuciones al desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Sus aportes clave a este campo incluyen:

- ✓ Notación de Leibniz: Introdujo símbolos como $\frac{dy}{dx}$ para representar derivadas, mientras dx y dy para cambios infinitesimales en x e y.
- ✓ Método de separación de variables: Este método consiste en reorganizar una ecuación diferencial en una forma que permita la separación de las variables independientes y dependientes, simplificando así el proceso de resolución.

Jacob y Johann Bernoulli (siglo XVII). Entre los seguidores de Leibniz se encuentran el par de hermanos suizos, Jacob Bernoulli contribuyó significativamente al campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con su trabajo sobre ecuaciones diferenciales y la teoría de la integración, destacándose por el desarrollo del método de Bernoulli para resolver ecuaciones diferenciales no lineales. Por otro lado, Johann Bernoulli, su hermano, realizó importantes avances en EDO al formular la ecuación diferencial que lleva su nombre, la ecuación de Bernoulli, utilizada para modelar problemas de flujo de fluidos y otras aplicaciones científicas y de ingeniería.

Jacobo Ricatti (siglo XVII). Matemático italiano, a quien se le reconoce por la ecuación diferencial no lineal que lleva su nombre, $\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$; la cuál estudió durante gran parte de su vida para analizar los fenómenos de hidrodinámica. En el siglo XXI, muchas investigaciones siguen apareciendo en la literatura matemática con respecto a la ecuación de Ricatti.

En resumen, Jacobo Ricatti hizo contribuciones significativas a las ecuaciones diferenciales a través de su trabajo en las ecuaciones de Ricatti, que tienen aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y la ingeniería, incluyendo la teoría de control y la teoría de matrices. Su legado matemático sigue siendo reconocido y valorado en la actualidad.

Leonhard Euler (siglo XVIII). Matemático suizo, contribuyó con muchas ideas importantes para el estudio de ecuaciones diferenciales. Sus contribuciones revolucionaron la teoría y la aplicación de las ecuaciones diferenciales. Aquí hay algunos de sus principales aportes:

- ✓ Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden.
- ✓ Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.
- ✓ Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Joseph-Louis Lagrange (siglo XVIII). Fue un matemático e ingeniero italiano-francés del siglo XVIII. Algunos de los aportes más destacados de Lagrange a las ecuaciones diferenciales son los siguientes:

- ✓ Método de variación de parámetros.
- ✓ Formulación del principio del mínimo de acción.

El siglo XX trajo un gran avance en la teoría de las ecuaciones diferenciales, incluyendo la teoría de sistemas dinámicos y la teoría de bifurcación, que permiten la comprensión del comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales complejas.

Hoy en día, las ecuaciones diferenciales tienen aplicaciones en muchos campos, incluyendo la física, la ingeniería, la biología, la economía y la meteorología entre otros. Las ecuaciones diferenciales también siguen siendo un área de investigación activa en las matemáticas con muchas preguntas fundamentales aún sin respuesta.

2.2 Definiciones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Según Carmona Jover & Filio López (2011) tenemos las siguientes definiciones:

Definición 1

Una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene derivadas o diferenciales de una o más variables con respecto a una o más variables independientes.

Ejemplos:

1. La ecuación diferencial ordinaria más simple es la ecuación de crecimiento exponencial:

$\frac{dy}{dx} = ky$. Donde "y" es una función de x y k es una constante. Esta ecuación describe el crecimiento de una cantidad "y" en función del tiempo x, y k determina la velocidad de crecimiento.

2. Un ejemplo clásico de una ecuación diferencial parcial es la ecuación de difusión:

$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. En esta ecuación, $u(x,t)$ representa la temperatura o concentración de alguna sustancia en función de la posición x y el tiempo t. La constante D es el coeficiente de difusión que determina cómo la sustancia se propaga en el espacio con el tiempo.

Definición 2

Orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden contenida en la ecuación.

Definición 3

Grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación diferencial está dada en forma polinomial.

2.2.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Figura 1

Clasificaciones de la ED.

Tipo
- Ordinarias: La ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a *una sola variable* independiente.
- Parciales: La ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto *a dos o más variables* independientes.

Orden
- Primer orden: $F(x, y, y') = 0$
- Segundo orden: $F(x, y', y'') = 0$
- Tercer orden: $F(x, y, y', y'', y''') = 0$
- .
- .
- .
- Orden n: $F(x, y, y', \ldots, y^{n}) = 0$

Grado
- Lineales:
  - *a*) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado.
  - *b*) Cada coeficiente de y y sus derivadas depende solamente de la variable independiente x.
- No lineales: Las que no cumplen las propiedades anteriores.

Nota. Adaptado de *Ecuaciones diferenciales* (p. 4), por Isabel Carmona Jover, 2011.

Tabla 1

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ecuación diferencial	Tipo	Orden	Grado	Lineal
$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$	Ordinaria	1	1	Sí
$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$	Parcial	1	1	Sí
$x^2y'' + xy' + y = 0$	Ordinaria	2	1	Sí
$yy'' + x^2y = x$	Ordinaria	2	1	No
$y' + y = \frac{x}{y}$	Ordinaria	1	1	No
$y'' + xyy' = \sin x$	Ordinaria	2	1	No
$x^3yy''' - x^2yy'' + y = 0$	Ordinaria	3	1	Sí
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0$	Ordinaria	2	1	Sí
$(y')^3 - y''' + y'' - y^2 = 0$	Ordinaria	5	3	No

Nota: Las ecuaciones diferenciales no son lineales cuando contiene términos no lineales en función de la "función incógnita" y sus derivadas. La razón por la cual una EDO no es lineal radica en cómo se combinan y operan las funciones y sus derivadas en la ecuación. Cuando se presentan términos no lineales, como productos de la función incógnita y sus derivadas o potencias diferentes de 1, las relaciones entre las variables se vuelven más complejas y menos directamente proporcionales. Elaboración propia.

Definición 4

Solución de una ecuación diferencial es una función que no contiene derivadas y que satisface a dicha ecuación; es decir, al sustituir la función y sus derivadas en la ecuación diferencial resulta una identidad.

Definición 5

Solución general de una ecuación diferencial es la función que satisface a la ecuación y que contiene una o más constantes arbitrarias (obtenidas de las sucesivas integraciones).

Definición 6

Solución particular de una ecuación diferencial se refiere a una solución específica que satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales o de contorno dadas.

La solución general de una EDO incluye todas las posibles soluciones que pueden surgir de la ecuación diferencial. Esta solución general suele incluir una constante arbitraria (o más de una) debido a la naturaleza de las integrales indefinidas que surgen al resolver la ecuación. Para obtener la solución particular, es necesario aplicar condiciones iniciales o de contorno específicas, lo que permite determinar el valor de estas constantes y obtener una solución única que cumple con las condiciones dadas.

Por ejemplo:

Tenemos una EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Y tiene una condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son valores dados. Entonces, al resolver la ecuación diferencial, obtendrás la solución general que incluirá una constante c:

$y(x) = F(x, c)$

Donde F es una función que involucra x y c. Luego, se usa la condición inicial $y(x_0) = y_0$ para determinar el valor particular de c, obteniendo así la solución particular:

$y(x) = F(x, c_{particular})$, donde $c_{particular}$ es el valor único de la constante que satisface la condición inicial dada.

Definición 7

Solución singular de una ecuación diferencial es una función cuya tangente a su gráfica en cualquier punto (x_0, y_0) con la tangente de otra solución, pero ya no coincide con esta última tangente en ninguna vecindad del punto (x_0, y_0) por pequeña que ésta sea. Estas soluciones no se obtienen a partir de la solución general.

Definición 8

Problema con valores iniciales es la ecuación diferencial acompañada de condiciones iniciales. Los valores iniciales en ecuaciones diferenciales son condiciones que se aplican en el punto inicial de la variable independiente para determinar una solución única a la ecuación diferencial. En otras palabras, son valores específicos de la función desconocida y derivadas en un punto inicial que se utilizan para encontrar una solución particular.

En el caso más común de ecuaciones diferenciales de primer orden, una condición inicial se presenta en la forma $y(x_0) = y_0$, donde x_0 es el valor inicial de la variable independiente y y_0 es el valor inicial de la función desconocida y.

2.3 Métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias

Se inicia el estudio de los métodos para resolver ecuaciones de primer orden.

2.3.1 *Ecuaciones por separación de variables*

Definición 9

Se dice que una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ es separable o que tiene variables separables, sí puede escribirse como $g(y)dy = f(x)dx$. Suponiendo que $f(x)$ y $g(y)$ son funciones continuas.

Integrando en ambos miembros, tenemos:

$g(y)dy = f(x)dx$

$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$, donde C es la constante de integración.

Cuando las variables de una ecuación no se pueden separar o combinar en términos con cada uno de los cuales es la misma variable, entonces se deben usar otros métodos para resolverla.

2.3.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 10

Polinomios homogéneos son aquellos en los que todos los términos son del mismo grado absoluto.

Definición 11

Se dice que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n, si para algún número real t,

$f(tx, ty) = t^n f(x, y)\ ; t > 0.$

Definición 12

La ecuación diferencial homogénea es de la forma: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, donde M y N tienen la propiedad de que para toda $t > 0$, la sustitución de x por tx y la de y por ty hace que M y N sean del mismo grado n.

$M(tx, ty) = t^n M(x, y)\ \ y\ \ \ N(tx, ty) = t^n N(x, y).$

Este tipo de ecuaciones puede reducirse a ecuaciones de variables separables mediante sustituciones apropiadas.

Teorema 1

Si la ED $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es homogénea, se puede transformar en una ED de variable separable por medio de las siguientes sustituciones:

- $y = vx$, donde v es una función derivable de x.
- $x = vy$, donde v es una función derivable de y.

Demostración:

Sea $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, una ED homogénea. Luego, $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado, es decir "n".

• Consideremos $y=xv$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{dx}{dx}+x\frac{dv}{dx}$$

$$dx\left(\frac{dy}{dx}\right)=dx\left(v\frac{dx}{dx}+x\frac{dv}{dx}\right)$$

$$dy=vdx+xdv$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$M(x,xv)dx+N(x,xv)(vdx+xdv)=0$$

$$x^nM(1,v)dx+x^nN(1,v)(vdx+xdv)=0$$

$\frac{x^nM(1,v)dx+x^nN(1,v)(vdx+xdv)}{x^n}=\frac{0}{x^n}$, con $x^n\neq 0$

$$\frac{x^nM(1,v)dx}{x^n}+\frac{x^nN(1,v)(vdx+xdv)}{x^n}=0$$

$$M(1,v)dx+N(1,v)(vdx+xdv)=0$$

$$M(1,v)dx+vN(1,v)dx+xN(1,v)dv=0$$

$$[M(1,v)+vN(1,v)]dx+xN(1,v)dv=0$$

$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,v)}{M(1,v)+vN(1,v)}dv=0$ (Es una ED de variables separables)

• Consideremos $x=yv$, tenemos:

$$\frac{dx}{dy}=v\frac{dy}{dy}+y\frac{dv}{dy}$$

$$dy\left(\frac{dx}{dy}\right)=dy\left(v\frac{dy}{dy}+y\frac{dv}{dy}\right)$$

$$dx=vdy+ydv$$

Sustituyendo, se obtiene:

$M(yv,y)[vdy+ydv]+N(yv,y)dy=0$

$y^nM(v,1)[vdy+ydv]+y^nN(v,1)dy=0$

$\frac{y^nM(v,1)[vdy+ydv]+y^nN(v,1)dy}{y^n}=\frac{0}{y^n}$, con $y^n\neq 0$

$\frac{y^nM(v,1)[vdy+ydv]}{y^n}+\frac{y^nN(v,1)dy}{y^n}=0$

$M(v,1)[vdy+ydv]+N(v,1)dy=0$

$vM(v,1)dy+yM(v,1)dv+N(v,1)dy=0$

$[vM(v,1)+N(v,1)]dy+yM(v,1)dv=0$

$\frac{dy}{y}+\frac{M(v,1)}{vM(v,1)+N(v,1)}dv=0$ (Es una ED de variables separables)

Luego, para resolver una ED homogénea, se aplica el cambio de variable $y=xv$ o $x=yv$ la ecuación se transforma en una ED de variable separable.

Nota: La demostración aquí es para una ecuación diferencial homogénea de primer orden en forma especial. En casos más generales, las ecuaciones diferenciales homogéneas pueden involucrar derivadas de orden superior y pueden requerir enfoques más complejos para su demostración y solución. La idea central es siempre reducir la ecuación a una forma en la que un cambio de variable resulte en ED de variable separable.

Aunque en la teoría se puede usar las dos sustituciones anteriores reduce una ED homogénea a una ED de variable separable, en la práctica sugerimos utilizar:

- ❖ $y=xv$, sí N es de estructura "más simple" que M.
- ❖ $x=yv$, sí M es de estructura "más simples" que N.

Tomar en cuenta esta observación, ya que conduce a integrales más fáciles de calcular al resolver la ED separable que se obtiene.

2.3.3 Ecuaciones exactas

Diferencial Total:

Si $f: R^2 \rightarrow R$, es una función diferenciable en $(x, y) \in R^2$, entonces la diferencial total de f es la función df, cuyo valor está dado por: $df(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$.

Diferencial Exacta:

Una expresión de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, se denomina exacta si existe una función $f: D \subset R^2 \rightarrow R$ tal que: $df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$.

Definición 13

Una expresión diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$, es una diferencial exacta de la región R del plano xy si corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x, y)$.

Una ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Se dice que es exacta si la expresión del primer miembro es una diferencial exacta.

Teorema 2

Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas es una región R del plano xy, entonces:

$M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta si y sólo si $\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$.

Demostración:

✓ Sea $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ una diferencial exacta.

Entonces existe una función $F(x, y)$ tal que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es su diferencial total. Es decir:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$$

Luego, $M(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \quad \wedge \quad N(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$

Así, $\frac{\partial}{\partial y}[M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right] \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial x}[N(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right]$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Por lo tanto, tenemos la hipótesis $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$.

- Sea: $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$.

Debemos demostrar que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta. Es decir, se debe probar que existe una función F tal que:

$$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \quad \wedge \quad N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

a) Supongamos que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$.

Entonces: $\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx = \int M(x,y)dx + g(y)$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

Debemos probar que existe una función $g(y)$ tal que se cumpla $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$. Es decir:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + g(y)\right] = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Esto será realmente verdadero si la derivada parcial de $\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]$ con respecto a x es cero.

En efecto: $\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=0}$$ (hipótesis: $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$)

Luego, integrando $g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$. Tenemos:

$g(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy.$

Además, sustituyendo $g(y)$ en $F(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$. Nos queda:

$F(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$ existe y se cumple que:

➢ Derivamos parcialmente con respecto a x la función $F(x,y)$.

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy\right\}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy\right\}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)+\int\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)+\int 0\,dy$, donde $\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=0$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)+0$

$\boldsymbol{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)}$

➢ Derivamos parcialmente con respecto a y la función $F(x,y)$.

$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy\right\}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int N(x,y)\,dy-\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dy\right]dx\right]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}[\int N(x,y)\,dy-\int M(x,y)dx]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}\int N(x,y)\,dy-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) + 0$$

$\boldsymbol{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)}$

Por lo tanto, $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta.

b) Supongamos que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

Entonces: $\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy = \int N(x,y)\, dy + h(x)$

$F(x,y) = \int N(x,y)\, dy + h(x)$

Debemos probar que existe una función $h(x)$ tal que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$. Es decir:

$\frac{\partial}{\partial x}[\int N(x,y)\, dy + h(x)] = M(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy + h'(x) = M(x,y)$

$h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy$

Esto será cierto si la derivada parcial de $\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy\right]$ con respecto a "y" es cero.

En efecto: $\frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy\right] = \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy\right]$

$\frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy\right] = \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int N(x,y)\, dy\right]$

$\frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy\right] = \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$

$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy\right] = 0}$ (Hipótesis: $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$)

Luego, integrando $h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\, dy$. Tenemos:

$h(x) = \int \left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right]dx$

Además, sustituyendo $h(x)$ en $F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x)$. Nos queda:

$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \int \left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right]dx$ existe y se cumple que:

- Derivamos parcialmente con respecto a x la función $F(x,y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int N(x,y)\,dy + \int \left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right]dx\right\}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int \left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right]dx\right]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int M(x,y)dx - \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\int N(x;y)dx\right]dy\right]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy + \frac{\partial}{\partial x}[\int M(x,y)dx - \int N(x,y)dy]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) + 0$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)}$$

- Derivamos parcialmente con respecto a "y" la función $F(x,y)$.

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int N(x,y)\,dy + \int \left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right]dx\right\}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int N(x,y)\,dy + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int \left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right]dx\right\}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) + \int \frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right]dx$$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) + \int 0\,dx$, donde $\frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy\right] = 0$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) + 0$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)}$$

Por lo tanto, $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta.

2.3.4 Método de agrupación para EDO exactas

Espinoza Ramos (2004) señala que:

En una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, para encontrar un factor de integración en muchos casos es dificultoso, sin embargo mediante el reconocimiento de ciertas diferenciales exactas comunes, se puede obtener la solución en forma mucho más práctica, a esta forma de agrupamiento de los términos de una ecuación diferencial denominaremos combinación integrable. Esta forma de resolver las ecuaciones diferenciales es mucho más rápido, sin embargo requiere de un buen conocimiento de diferenciales y una cierta pericia en determinar cómo deben agruparse los términos y para esto daremos algunas sugerencias de diferenciales exactas. (p.99)

Es importante recordar que el método de agrupación solo se aplica a ecuaciones diferenciales exactas, donde la condición $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ se cumple. Si esta condición no se satisface, es necesario utilizar otros métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

Tabla 2

Diferenciales básicas para el desarrollo de las EDO exactas.

1. $\boldsymbol{xdy + ydx = d(xy)}$	5. $\boldsymbol{\frac{xdy+ydx}{xy} = d[ln(xy)]}$
2. $\boldsymbol{\frac{xdy-ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)}$	6. $\boldsymbol{\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} = \frac{1}{2}d\left(\frac{x+y}{x-y}\right)}$
3. $\boldsymbol{\frac{xdy-ydx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)}$	7. $\boldsymbol{\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = d\left[arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]}$
4. $\boldsymbol{\frac{xdy-ydx}{xy} = d\left[ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]}$	8. $\boldsymbol{\frac{dx+dy}{x+y} = d[ln(x+y)]}$

Nota. Fuentes: Espinoza Ramos, 2004, p. 100.

2.3.5 Método por el factor integrante

Consideremos la ecuación de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, si la ecuación no es exacta se puede transformar en exacta; eligiendo una función P que pueda depender tanto de x como de y o xy de tal manera que la ecuación $\boldsymbol{P}M(x,y)dx + \boldsymbol{P}N(x,y)dy = 0$ sea exacta, entonces a la función $\boldsymbol{P}$ se llama factor integrante o factor de integración. De modo que $\frac{\partial(PM)}{\partial y} = \frac{\partial(PN)}{\partial x}$.

Demostración:

Caso 1: Supongamos que $\boldsymbol{P}$ es función sólo de x.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial y}(PM) = P\frac{\partial M}{\partial y} \qquad \wedge \qquad \frac{\partial}{\partial x}(PN) = P\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial P}{\partial x}$$

Tenemos: $$P\frac{\partial M}{\partial y} = P\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$P\frac{\partial M}{\partial y} - P\frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$P\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial P}{\partial x} = P\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial x$$

Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ es función sólo de x, por lo que se hace $f(x)$ al coeficiente de ∂x.

En efecto: $$\frac{\partial P}{P} = f(x)\partial x$$

$$\int \frac{\partial P}{P} = \int f(x)dx$$

$$\ln|P| = \int f(x)dx$$

$$e^{\ln|P|} = e^{\int f(x)dx}$$

$$P = e^{\int f(x)dx}$$

Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ contiene la variable "y", entonces contiene dos variables dependientes y no es posible integrar.

Caso 2: Supongamos que $\boldsymbol{P}$ es función sólo de y.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial y}(PM) = P\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial P}{\partial y} \qquad \wedge \qquad \frac{\partial}{\partial x}(PN) = P\frac{\partial N}{\partial x}$$

Tenemos: $$P\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial P}{\partial y} = P\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial P}{\partial y} = P\frac{\partial N}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$M\frac{\partial P}{\partial y} = P\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\partial y$$

Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ es función sólo de y, por lo que se hace $g(y)$ igual al coeficiente de ∂y.

En efecto: $$\frac{\partial P}{P} = g(y)\partial y$$

$$\int \frac{\partial P}{P} = \int g(y)dy$$

$$\ln|P| = \int g(y)dy$$

$$e^{\ln|P|} = e^{\int g(y)dy}$$

$$P = e^{\int g(y)dy}$$

Caso 3: Si $\boldsymbol{P}$ es función de xy.

Tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}(PM) = \frac{\partial}{\partial x}(PN)$$

$$P\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial P}{\partial y} = P\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial P}{\partial x}$$

Sea $u = xy$. Entonces: $\frac{\partial P}{\partial x} = P'(u)d(u)$ $\qquad$ $\frac{\partial P}{\partial y} = P'(u)d(u)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = yP'(u) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = xP'(u)$$

Luego: $P\frac{\partial M}{\partial y} + MxP'(u) = P\frac{\partial N}{\partial x} + NyP'(u)$

$$MxP'(u) - NyP'(u) = P\frac{\partial N}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$P'(u)(Mx - Ny) = P\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{P'(u)}{P} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$$

Sea: $b(u) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$

En efecto: $\frac{P'(u)}{P} = b(u)du$

$$\int \frac{P'(u)}{P} = \int b(u)du$$

$$\ln|P| = \int b(u)du$$

$$e^{\ln|P|} = e^{\int b(u)du}$$

$$P = e^{\int b(u)du}$$

2.3.6 Ecuaciones lineales de primer orden

Carmona Jover & Filio López (2011) tiene la siguiente definición:

Definición 14

La forma general de una ecuación lineal de primer orden es $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

Si $r(x)$ es idénticamente igual a cero, entonces la ecuación se llama lineal homogénea (no en el sentido de polinomio homogéneo, sino como el nombre que da el álgebra lineal a las ecuaciones igualadas a cero); si $r(x) \neq 0$ entonces es lineal no homogénea. (p. 73)

Si $r(x) = 0 \implies$ son de variable separables. Es decir:

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -f(x)y$

$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$

$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx + K_1$

$\ln|y| = -\int f(x)dx + K_1$

$e^{\ln|y|} = e^{-\int f(x)dx + K_1}$

$y = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{K_1}$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$, con $K = e^{K_1}$

¿Qué sucede cuando $r(x) \neq 0$?

Se obtendrá la solución para $r(x) \neq 0$, usando el método de factor integrante y el de variación de parámetros.

Hay que destacar que la ecuación $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ es lineal y de primer orden; con variable independiente x, y variable dependiente "y".

También nos podemos encontrar linealidad en x, es decir; tenemos la siguiente ecuación diferencial $\frac{dx}{dy} + f(y)x = r(y)$ que es lineal con variable independiente "y", y variable dependiente x.

2. 3.6.1 Método de factor integrante

Buscaremos un factor que nos convierta la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ en exacta y se resuelve por los métodos anteriores.

Si $r(x) \neq 0$, entonces la ecuación $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ se expresa como:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y - r(x) = 0$$

$$dx\left[\frac{dy}{dx} + f(x)y - r(x)\right] = dx[0]$$

$$dy + [f(x)y - r(x)]dx = 0$$

$$[f(x)y - r(x)]dx + dy = 0 \qquad (1)$$

Se puede verificar que la ecuación diferencial (1), no es exacta.

Sea:

$$M(x,y) = yf(x) - r(x) \qquad N(x,y) = 1$$

Así:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{d}{dy}[yf(x) - r(x)] \qquad \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = f(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = 0$$

La ecuación (1) no es exacta, al menos que $f(x) = 0$.

Busquemos un factor integrante para (1).

Sea $\boldsymbol{P}$ un factor integrante. Supongamos que $\boldsymbol{P}$ es función sólo de x, entonces:

$$P\{[f(x)y - r(x)]dx + dy\} = P(0)$$

$[yPf(x) - Pr(x)]dx + Pdy = 0$ (2) es exacta.

Se comprueba la exactitud, tenemos:

$$M(x,y) = yPf(x) - Pr(x) \qquad N(x,y) = P$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{d}{dy}[yPf(x) - Pr(x)] \qquad \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(P)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = Pf(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Dado que (2) es exacta. Se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = Pf(x)$$

$$\frac{\partial P}{P} = f(x)\partial x$$

$$\int \frac{\partial P}{P} = \int f(x)\partial x$$

$$\ln|P| = \int f(x)dx$$

$$e^{\ln|P|} = e^{\int f(x)dx}$$

$$P = e^{\int f(x)dx}$$

Así, la ecuación (2) se puede escribir:

$$e^{\int f(x)dx}[yf(x) - \mathrm{r}(x)]dx + e^{\int f(x)dx}dy = e^{\int f(x)dx}(0)$$

$$ye^{\int f(x)dx}f(x)dx - e^{\int f(x)dx}r(x)dx + e^{\int f(x)dx}dy = 0$$

$$ye^{\int f(x)dx}f(x)dx + e^{\int f(x)dx}dy = e^{\int f(x)dx}r(x)dx$$

$$d\left[ye^{\int f(x)dx}\right] = e^{\int f(x)dx}r(x)dx$$

$$\int d\left[ye^{\int f(x)dx}\right] = \int e^{\int f(x)dx}r(x)dx + K$$

$$ye^{\int f(x)dx} = \int e^{\int f(x)dx}r(x)dx + K$$

$$y = \frac{\int e^{\int f(x)dx}r(x)dx + K}{e^{\int f(x)dx}}$$

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int e^{\int f(x)dx}r(x)dx + K\right] \qquad (3)$$

Luego la ecuación (3) es la solución general $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

2. 3.6.2 Método de variación de parámetros

Es un procedimiento bastante usual en matemáticas introducir cambios de variables, hacer sustituciones o reemplazar funciones por otras más sencillas que faciliten el proceso operativo.

Se quiere encontrar solución general de $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

Se sabe que la solución general de la ecuación diferencial homogénea de primer orden

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$ es; $y = Ke^{-\int f(x)dx}$

Este procedimiento consiste en suponer que la constante K en la solución general de la ecuación homogénea asociada $y' + f(x)y = 0$ es una función $u(x)$, donde $\frac{dy}{dx} = y'$.

Supongamos que $y = u(x)e^{-\int f(x)dx}$ es solución general de $y' + f(x)y = r(x)$, entonces:

Derivando "y", tenemos:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left[u(x)e^{-\int f(x)dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\int f(x)dx}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}\left[e^{-\int f(x)dx}\right]$$

$$y' = e^{-\int f(x)dx}u'(x) + u(x)e^{-\int f(x)dx}\left[-\frac{d}{dx}\int f(x)dx\right]$$

$$y' = u'(x)e^{-\int f(x)dx} + u(x)e^{-\int f(x)dx}[-f(x)]$$

Sustituyendo en la ecuación $y' + f(x)y = r(x)$, se obtiene:

$$u'(x)e^{-\int f(x)dx} + u(x)e^{-\int f(x)dx}[-f(x)] + f(x)u(x)e^{-\int f(x)dx} = r(x)$$

$$u'(x)e^{-\int f(x)dx} - f(x)u(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)u(x)e^{-\int f(x)dx} = r(x)$$

$$u'(x)e^{-\int f(x)dx} = r(x)$$

$$u'(x) = \frac{r(x)}{e^{-\int f(x)dx}}$$

$$u'(x) = e^{\int f(x)dx}r(x)$$

$$\int u'(x) = \int\left[e^{\int f(x)dx}r(x)\right]dx + K_1$$

$$u(x) = \int\left[e^{\int f(x)dx}r(x)\right]dx + K_1$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{y = \left\{\int\left[e^{\int f(x)dx}r(x)\right]dx + K_1\right\}e^{-\int f(x)dx}}$ es solución general de

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x).$

En esta sección, no estudiaremos tipos específicos de ecuaciones diferenciales. En cambio, consideraremos dos ecuaciones diferenciales clásicas.

2.3.7 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Consideremos ahora una clase más especial de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a ecuaciones lineales mediante transformaciones especiales, que son las ecuaciones de Bernoulli.

Definición 15

Es una ecuación de la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)y^n$ con $n \neq 0$ o bien $n \neq 1$ .Por lo que para $n = 0$ y 1, la ecuación es lineal.

Se llama ecuación de Bernoulli en honor al matemático suizo Johan Bernoulli (1654-1705).

Teorema 3

Sea $n \neq 0$ o bien $n \neq 1$. Entonces la transformación $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)y^n$ a una ecuación diferencial lineal en v.

Demostración:

Consideremos la ED de Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)y^n$$

Multipliquemos la ED por y^{-n}, obteniendo:

$$y^{-n}\left[\frac{dy}{dx} + f(x)y\right] = r(x)y^n y^{-n}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + f(x)yy^{-n} = r(x)y^n y^{-n}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + f(x)y^{1-n} = r(x)y^{n-n}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+f(x)y^{1-n}=r(x)y^{0}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+f(x)y^{1-n}=r(x)\cdot 1$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+f(x)y^{1-n}=r(x) \qquad (1)$$

Sea $v=y^{1-n}$, entonces:

$$\frac{d}{dy}v=\frac{d}{dy}y^{1-n}$$

$$\frac{dv}{dy}=(1-n)y^{-n}$$

$$dv=(1-n)y^{-n}dy$$

$$\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dv}{dx}=y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Luego la ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dv}{dx}+f(x)v=r(x)$$

$$(1-n)\left[\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dv}{dx}+f(x)v\right]=[1-n]r(x)$$

$\frac{dv}{dx}+(1-n)f(x)v=(1-n)r(x)$, la cual es una ED lineal en v.

2.3.8 Ecuaciones diferenciales de Ricatti

Estas ecuaciones diferenciales no se pueden resolver por métodos hasta este momento estudiados, pero sin embargo si se conoce una solución particular, se puede hallar la solución de la ecuación diferencial.

Definición 16

Es una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x) + r(x)y + s(x)y^2$. (R_1)

Donde $f(x), r(x)\ y\ s(x)$ son funciones de x.

Teorema 4

Sea $y_1(x)$ una solución de (R_1). Entonces la sustitución $y = y_1 + \frac{1}{v}$ transforma a (R_1) en una ecuación lineal en v.

Demostración:

Sea $y_1(x)$ una solución de (R_1).

Entonces:

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x) + r(x)y_1 + s(x)(y_1)^2$$

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$dy = d\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)$$

$$dy = dy_1 + d\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$dy = dy_1 + \left(-\frac{1}{v^2}\right)dv$$

$$\frac{1}{dx}dy = \frac{1}{dx}\left[dy_1 + \left(-\frac{1}{v^2}\right)dv\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{dv}{dx}$$

Por el principio de sustitución:

$$\frac{dy_1}{dx} + \left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{dv}{dx} = f(x) + r(x)\left[y_1 + \frac{1}{v}\right] + s(x)\left[y_1 + \frac{1}{v}\right]^2$$

$$f(x)+r(x)y_1+s(x)(y_1)^2-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx}=f(x)+r(x)y_1+\frac{1}{v}r(x)+s(x)\left[(y_1)^2+2\frac{y_1}{v}+\frac{1}{v^2}\right]$$

$$f(x)+r(x)y_1+s(x)(y_1)^2-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx}=f(x)+r(x)y_1+\frac{1}{v}r(x)+s(x)(y_1)^2+2\frac{y_1}{v}s(x)+\frac{1}{v^2}s(x)$$

Simplificando, nos queda:

$$-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{v}r(x)+2\frac{y_1}{v}s(x)+\frac{1}{v^2}s(x)$$

$$-v^2\left[-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx}\right]=-v^2\left[\frac{1}{v}r(x)+2\frac{y_1}{v}s(x)+\frac{1}{v^2}s(x)\right]$$

$$\frac{dv}{dx}=-vr(x)-2v(y_1)s(x)-s(x)$$

$$\frac{dv}{dx}+vr(x)+2v(y_1)s(x)=-s(x)$$

$$\frac{dv}{dx}+[r(x)+2(y_1)s(x)]v=-s(x)$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\frac{dv}{dx}+[r(x)+2(y_1)s(x)]v=-s(x)}$ es lineal en v.

2.4 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Resolver problemas en Matemática, implica aplicar conceptos matemáticos a situaciones del mundo real.

2.4.1 Los problemas de aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que desarrollaremos en este solucionario son las siguientes:

2. 4.1.1 Problemas de trayectorias ortogonales.

Dos curvas se cortan en ángulo recto si sus tangentes en el punto de intersección son perpendiculares. En esta sección, se utilizan ecuaciones diferenciales de primer orden para determinar cuándo dos grupos de curvas son ortogonales. Es decir, cuando cada curva de

una familia se cruza con la curva de la otra familia en ángulo recto. Las trayectorias ortogonales son aquellas curvas que se cruzan de manera perpendicular en un punto dado. Gamarra Miranda (2019) comenta la siguiente definición: Trayectoria es una línea descrita en el espacio por un cuerpo en movimiento que puede ser una línea recta o curva y ortogonal se dice del ángulo de 90°, que forman las líneas de la trayectoria respecto a un plano, es decir son perpendiculares. (p.1)

Tenemos una definición matemática que señala Zill (1986):

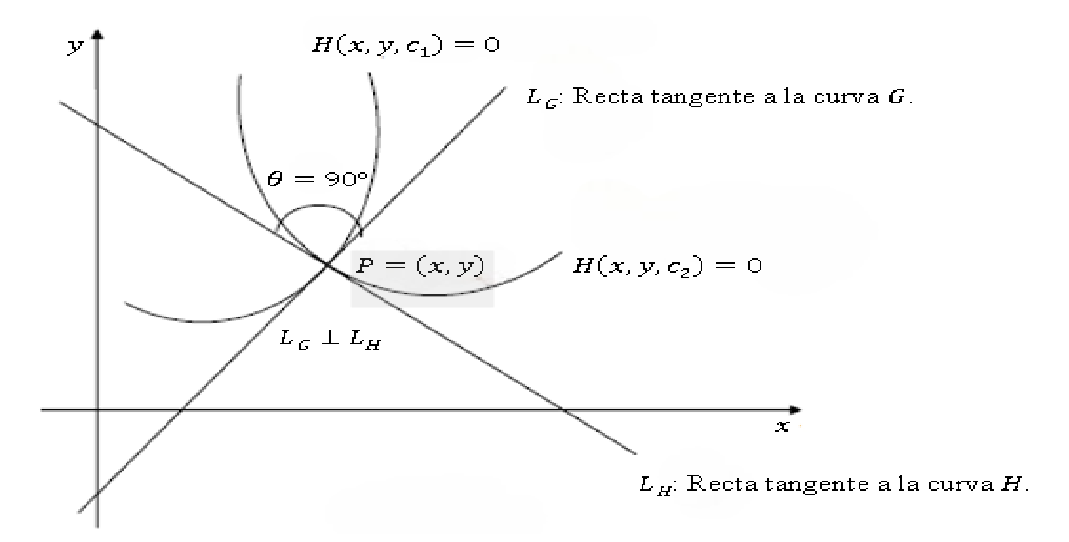
Definición 17

"Cuando todas las curvas de una familia de curvas $G(x, y, c_1) = 0$ cortan ortagonalmente a todas las curvas de otra familia $H(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son, cada una, **trayectorias ortogonales** de la otra" (p. 81).

En otras palabras, una trayectoria ortogonal es una curva cualquiera que corta el ángulo recto a toda curva de otra familia.

Figura 2

Curvas ortogonales.



Nota. Recuerde que el ángulo entre dos curvas queda determinado por el ángulo que forman las rectas tangentes a ambas curvas en cualquiera de sus puntos de intersección. Elaboración propia.

Método general

Para encontrar las trayectorias ortogonales de una familia de curva dada, se halla en primer lugar la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que describe a la familia. La ecuación diferencial de la segunda familia, ortogonal a la familia dada, así $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x,y)}$.

Nota: La trayectoria ortogonal de una curva tiene por pendiente la recíproca negativa de la primera, así pues, a lo largo de cualquier trayectoria ortogonal tenemos que:

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x,y)}$, o bien $-\frac{dx}{dy} = f(x, y)$.

2. 4.1.2 Problemas de mezclas.

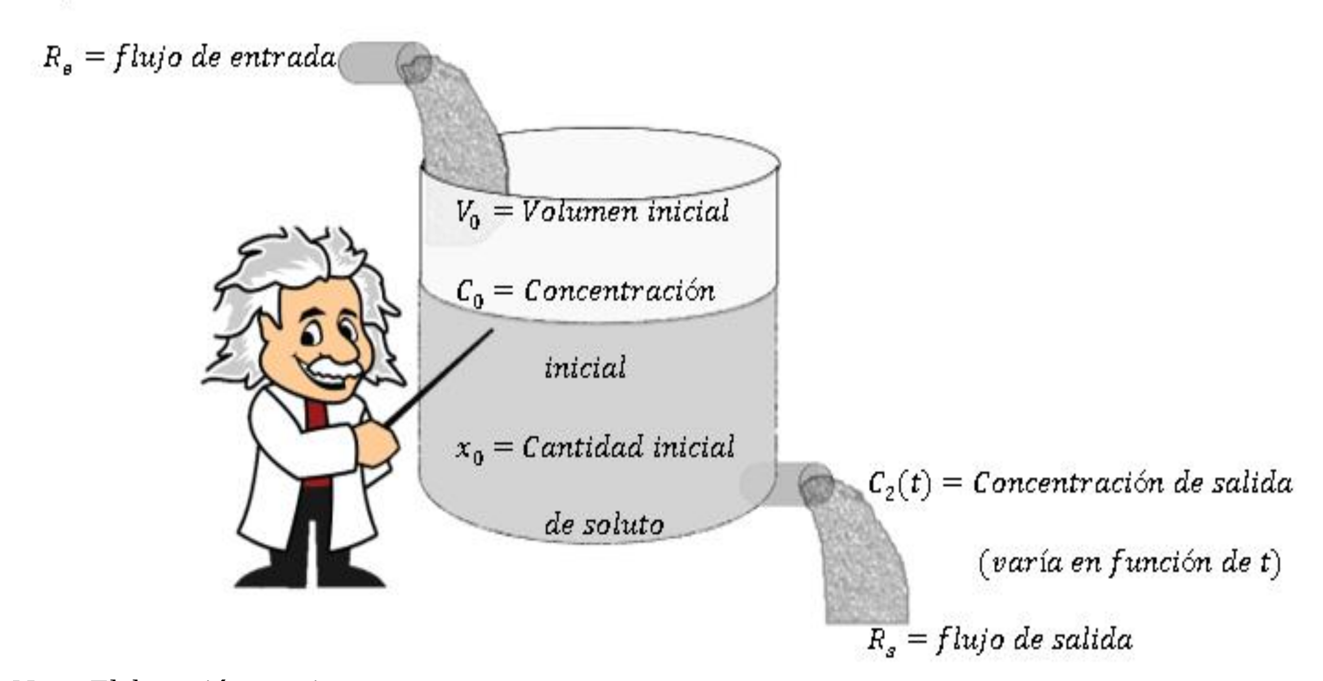
En química, una mezcla se define como la combinación de dos o más sustancias en proporciones variables, en la cual cada componente mantiene sus propiedades químicas y físicas originales sin sufrir alteraciones en su estructura interna. Este concepto es fundamental en el análisis de soluciones y sistemas con múltiples componentes.

Algunos problemas relacionados con mezclas de fluidos implican el planteamiento de una ecuación diferencial lineal de primer orden para modelar dinámicamente la cantidad de mezcla o la concentración de una sustancia en un fluido determinado. Estas ecuaciones permiten describir cómo cambian estas cantidades a lo largo del tiempo, considerando factores como la tasa de entrada y salida de los componentes, así como posibles reacciones entre las sustancias presentes.

Imaginemos un recipiente con un volumen inicial V_0 de una solución compuesta por una mezcla de soluto y solvente. Hay un flujo de entrada como de salida y se quiere calcular la cantidad de soluto $x(t)$ que hay en el tanque en cualquier instante de tiempo t, en función de la cantidad inicial de soluto x_0 al tiempo de iniciar el proceso de mezclados.

Figura 3

Recipiente con sus datos.



Nota. Elaboración propia.

La concentración de soluto en el tanque en cualquier instante de tiempo t. Viene dada por la ecuación: $C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$, donde $x(t)$ es la cantidad de soluto en cualquier instante de tiempo t y $V(t)$ denota volumen de líquido en el tanque en cualquier instante de tiempo t.

Observaciones:

- Si el flujo de entrada de líquido al recipiente es igual al fujo de salida de líquido del recipiente, es decir, $(R_e = R_s)$, entonces el volumen en cualquier instante de tiempo t es el mismo. Por lo tanto, el volumen se mantiene constante ($V(t) = V_0$), con V_0 volumen inicial.
- Si el flujo de entrada de líquido al recipiente es mayor al flujo de salida de líquido del recipiente $(R_e > R_s)$, entonces el volumen en cualquier instante t es mayor que el volumen inicial ($V(t) > V_0$).
- Si el flujo de entrada de líquido al recipiente es menor al flujo de salida de líquido del recipiente ($R_e < R_s$), entonces el volumen en cualquier instante t es menor que el volumen inicial ($V(t) < V_0$).

El volumen de líquido en el tanque en cualquier instante de tiempo t; viene dado por la ecuación: $V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$.

En los problemas se requiere determinar la cantidad $x(t)$ de una sustancia que hay en un tanque en cada instante t. La razón de cambio de la cantidad de la sustancia presente en el tanque es igual a la rapidez de entrada menos la rapidez de salida.

Por lo que tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

Donde:

$R_1 = (R_e)(C_1)$

$Rapidez\ de\ entrada = (flujo\ de\ entrada)(concentración\ de\ entrada).$

$R_2 = (R_s)(C_2)$

$Rapidez\ de\ salida = (flujo\ de\ salida)(concentración\ de\ salida)$

Observación: Es importante que quede claro que la cantidad de soluto en el tanque, una vez iniciado el proceso, va a variar en la medida en que transcurre el tiempo; es decir, la concentración de sal en el tanque es una función del tiempo.

Notas:

1. Condiciones iniciales cruciales: En los problemas de mezcla, es fundamental establecer las condiciones iniciales con precisión.
2. Tasas de flujo de entrada y salida: Para modelar adecuadamente el proceso de mezcla, es necesario comprender las tasas de flujo de entrada y salida de las sustancias.
3. Homogeneización de la mezcla: En muchos problemas de mezcla, se asume que la mezcla se mantiene uniforme en el sistema, lo que significa que la concentración de las sustancias es la misma en todo el volumen.

Capítulo III Ejercicios desarrollados

3.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

3.1.1 Tipos

3.1.2 Orden

3.1.3 Grado

3.1.4 Linealidad

• Determine: el tipo, orden, grado, si es lineal o no y variable dependiente e independiente de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 5y = \cos x$

Solución:

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **2**, grado **1**, **es lineal** porque la ecuación tiene la forma $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} = \sin x$

Solución:

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **2**, grado **1**, **no lineal** porque tiene una variable dependiente multiplicada por su primera derivada. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} = \sin x$.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - (x-1)y = xy^{\frac{3}{2}}$

Solución:

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **2**, grado **1**, **no lineal** porque la variable dependiente "y" no es de exponente 1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - (x-1)y = xy^{\frac{3}{2}}$.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin y$

Solución:

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **2**, grado 1, **no lineal** porque una variable dependiente está dentro de "sin". $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin y$.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$**.**

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Solución:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)^4$$

Elevamos a la cuarta potencia ambos miembros de la ecuación.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **2**, grado **4**, **no lineal** porque sus derivadas no son de grado 1. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

6. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y}$

Solución:

La ecuación diferencial es **parcial**, de orden **2** y grado **1**.

Para saber si es lineal o no, se tiene que: matemáticamente, una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en dos variables independientes $x\ e\ y$, y una variable dependiente $u(x,y)$ se puede escribir en la forma general:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = G(x,y)$$

Donde $A, B, C, D, E, F\ y\ G$ son funciones de $x\ e\ y$, y $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}\ y\ u_{yy}$ son las variables dependientes y sus derivadas con respecto a $x\ e\ y$.

Expresemos la ecuación diferencial dada en su forma general: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{x}{y}$. Por lo tanto, la ecuación diferencial parcial es **no lineal**, porque $\frac{\partial u}{\partial x}$ no es de grado 1, esto es $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{x}{y}$

Variable dependiente: $\boldsymbol{u}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

7. $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N}{\partial r} + kN$, donde k es constante.

Solución:

La ecuación diferencial es **parcial**, de orden **2** y grado **1**. Expresamos la ecuación diferencial dada en su forma general: $\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{\partial N}{\partial t} + kN = 0$. Por lo tanto, la ecuación diferencial es **no lineal**.

Variable dependiente: $\boldsymbol{N}$, variable independiente: $\boldsymbol{r, t}$.

8. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{-x^2}$

Solución:

La ecuación diferencial es **parcial**, de orden **2** y grado **1**. Expresemos la ecuación diferencial dada en su forma general: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x^2}$. Por lo tanto, la ecuación diferencial **es lineal**.

Variable dependiente: $\boldsymbol{u}$, variable independiente: $\boldsymbol{x, y}$.

9. $\sqrt{y' + 2xy} = \cos x$

Solución:

$\sqrt{y' + 2xy} = \cos x$

$\left(\sqrt{y' + 2xy}\right)^2 = (\cos x)^2$ Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

$y' + 2xy = \cos^2 x$

$\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos^2 x$ Cambiando de notación: $y' = \frac{dy}{dx}$.

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **1**, de grado **1** y **es lineal**.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

10. $x^3 \frac{d^4y}{dx^4} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$

Solución:

$$x^3 \frac{d^4y}{dx^4} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **4**, de grado **1** y **es lineal**

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

11. $(D_x y)^3 = 3x^2 - 1$

Solución:

$(D_x y)^3 = 3x^2 - 1$

$\sqrt[3]{(D_x y)^3} = \sqrt[3]{3x^2 - 1}$ Se extrae raíz cúbica a ambos miembros de la ecuación.

$D_x y = \sqrt[3]{3x^2 - 1}$ La notación $D_x y$, significa derivada de "y" con respecto a "x".

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **1**, de grado **1** y **es lineal**.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

12. $(\sin x) \frac{d^3y}{dx^3} - (\cos x) \frac{dy}{dx} = 2$

Solución:

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **3**, de grado **1**, **es lineal**.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

13. $(1-y^2)dx + xdy = 0$

Solución:

Transformando la ED en la forma: $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$.

$(1-y^2)dx + xdy = 0$

$\frac{1}{dx}[(1-y^2)dx + xdy = 0]$ Multiplicando por $\frac{1}{dx}$ la ecuación.

$\frac{1}{dx}(1-y^2)dx + \frac{1}{dx}xdy = \frac{1}{dx}\cdot 0$ Simplificando.

$1 - y^2 + x\frac{dy}{dx} = 0$ Ordenado.

$x\frac{dy}{dx} + 1 - y^2 = 0$

$x\frac{dy}{dx} - y^2 = -1$

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **1**, de grado **1**, **no lineal** porque la variable dependiente "y" no es de exponente 1. $x\frac{dy}{dx} - y^2 = -1$.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

14. $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

Solución:

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **3**, de grado **1**, **no lineal** porque una derivada no es de grado 1. $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$.

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{x}$.

15. $\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}=0$

Solución:

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial t}=0$$

La ecuación diferencial es **parcial**, de orden **2**, de grado **1**, **es lineal** porque tiene la forma:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y)$$

Variable dependiente: $\boldsymbol{y}$, variable independiente: $\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}$.

16. $\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}=Kv\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^2$, donde K es una constante.

Solución:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}=Kv\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^2$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}-Kv\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^2=0$$

La ecuación diferencial es **parcial**, de orden **4**, de grado **1**, **no lineal** porque la variable dependiente v está multiplicada por una derivada parcial, además, una derivada parcial es de grado 2.

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}-Kv\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^2=0.$$

Variable dependiente: v, variable independiente: $\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}$.

17. $(y'')^2 \cos x + (y')^4 \sin x = 1$

Solución:

$(y'')^2 \cos x + (y')^4 \sin x = 1$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \cos x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \sin x = 1$$

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **2**, de grado **2**, **no lineal** parque sus derivadas no son de grado 1. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \cos x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \sin x = 1.$

Variable dependiente $\boldsymbol{y}$, variable independiente $\boldsymbol{x}$.

18. $(\sin xy)\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{dy}{dx} = 0$

Solución:

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **3**, de grado **1**, **no lineal** porque la variable dependiente "y" es el argumento de una función trigonométrica.

$(\sin xy)\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{dy}{dx} = 0.$

Variable dependiente $\boldsymbol{y}$, variable independiente $\boldsymbol{x}$.

19. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$

Solución:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

La ecuación diferencial es **parcial**, de orden **2**, de grado **1**, **es lineal** porque tiene la forma:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y)$$

Variable dependiente $\boldsymbol{u}$, variable independiente $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

20. $(2xy-y)dx+e^x dy=0$

Solución:

$$(2xy-y)dx+e^x dy=0$$

$$\frac{1}{dx}[(2xy-y)dx+e^x dy=0]$$ Multiplicando por $\frac{1}{dx}$ la ecuación.

$$\frac{1}{dx}\cdot(2xy-y)dx+\frac{1}{dx}\cdot e^x dy=\frac{1}{dx}\cdot 0$$ Simplificando.

$$2xy-y+e^x\frac{dy}{dx}=0$$

$$e^x\frac{dy}{dx}+2xy-y=0$$ Ordenando.

$$e^x\frac{dy}{dx}+(2x-1)y=0$$ Factorizando.

La ecuación diferencial es **ordinaria**, de orden **1**, de grado **1**, **es lineal** de la forma:

$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$.

Variable dependiente $\boldsymbol{y}$, variable independiente $\boldsymbol{x}$.

3.2 Soluciones de una ecuación diferencial ordinaria

3.2.1 Verificación de soluciones en la EDO

• Verificar, en los problemas que se dan a continuación, que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas.

1. $y = \frac{\sin x}{x}$, solución de $x\frac{dy}{dx} + y = \cos x$.

Solución:

$y = \frac{\sin x}{x}$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ Derivada de "y" con respecto a "x".

$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$ Derivada de un cociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x - (1)\sin x}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

Ahora sustituimos "y" y $\frac{dy}{dx}$ en $x\frac{dy}{dx} + y = \cos x$.

Tenemos:

$x\frac{dy}{dx} + y = \cos x$

$x\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) + \frac{\sin x}{x} = \cos x$ Simplificando la primera fracción.

$\frac{x\cos x - \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x$ Separando en fracciones homogéneas la primera fracción.

$\frac{x\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x$ Reduciendo términos semejantes.

$\cos x + 0 = \cos x$

$\cos x = \cos x$

Entonces: $y = \frac{\sin x}{x}$, es solución de $x\frac{dy}{dx} + y = \cos x$.

2. $y = e^{\sin^{-1} kx}$, solución de $x\frac{dy}{dx} = y\tan(\ln y)$.

Solución:

$y = e^{\sin^{-1} kx}$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}e^{\sin^{-1} kx}$ Derivada de "y" con respecto a "x".

$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1} kx}\frac{d}{dx}(\sin^{-1} kx)$ Derivada exponencial: $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot u'$.

$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1} kx} \cdot \frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}}$ Derivada de arcoseno: $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{ke^{\sin^{-1} kx}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$

Ahora sustituimos "y" y $\frac{dy}{dx}$ en $x\frac{dy}{dx} = y\tan(\ln y)$.

$x\frac{dy}{dx} = y\tan(\ln y)$

$x\left(\frac{ke^{\sin^{-1} kx}}{\sqrt{1-k^2x^2}}\right) = e^{\sin^{-1} kx}\tan\left(\ln e^{\sin^{-1} kx}\right)$

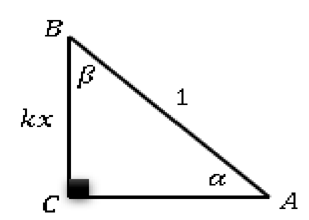
$\frac{kxe^{\sin^{-1} kx}}{\sqrt{1-k^2x^2}} = e^{\sin^{-1} kx}\tan(\sin^{-1} kx)$

$\frac{kxe^{\sin^{-1} kx}}{\sqrt{1-k^2x^2}} = e^{\sin^{-1} kx} \cdot \frac{kx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$

$\frac{kxe^{\sin^{-1} kx}}{\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{kxe^{\sin^{-1} kx}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$

Sea: $\tan(\sin^{-1} kx) = \tan\alpha$

$\alpha = \sin^{-1} kx \quad \rightarrow \sin\alpha = kx$



$a^2 + b^2 = c^2$ $\tan\alpha = \frac{kx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = (1)^1 - (kx)^2$

$b^2 = 1 - k^2x^2$

$\sqrt{b^2} = \sqrt{1-k^2x^2}$

$b = \sqrt{1-k^2x^2}$

Entonces: $y = e^{\sin^{-1} kx}$, es solución de $x\frac{dy}{dx} = y\tan(\ln y)$.

3. $x^2y + y^2 = c_1$, solución de $2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$.

Solución:

$x^2y + y^2 = c_1$

$\frac{d}{dx}(x^2y + y^2) = \frac{d}{dx}c_1$ Derivación implícitamente la función.

$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$ Derivada de un producto: $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$y\frac{d}{dx}(x^2) + x^2\frac{d}{dx}(y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ Despejando $2xy$.

$x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2xy$ Factorizando el miembro izquierdo con $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{dy}{dx}(x^2 + 2y) = -2xy$ Despejando $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2+2y}$

Ahora sustituimos $\frac{dy}{dx}$ en $2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$.

$2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$, transformamos la ecuación en la forma $\frac{dy}{dx}$.

$2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$

$\frac{1}{dx}[2xydx + (x^2 + 2y)dy] = \frac{1}{dx}(0), con\ dx \neq 0$

$\frac{2xydx}{dx} + \frac{(x^2+2y)dy}{dx} = 0$

$2xy + (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$, sustituyendo…

$2xy + (x^2 + 2y)\left(-\frac{2xy}{x^2+2y}\right) = 0$

$2xy - 2xy = 0$

$0 = 0$

Entonces: $x^2y + y^2 = c_1$, es solución de $2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$.

4. $y = \sqrt{x^2 - cx}$, solución de $(x^2 + y^2)dx - 3xydy = 0$.

Solución:

$y = \sqrt{x^2 - cx}$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2 - cx}$ Derivada de "y" con respecto a "x".

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-cx}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - cx)$ Derivada de raíz cuadrada: $\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-cx}} \cdot (2x - c)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-c}{2\sqrt{x^2-cx}}$

Ahora sustituimos "y" y $\frac{dy}{dx}$ en $(x^2 + y^2)dx - 3xydy = 0$.

$(x^2 + y^2)dx - 3xydy = 0$ Transformando la ecuación en la forma $\frac{dy}{dx}$.

$x^2 + y^2 - 3xy\frac{dy}{dx} = 0$

$x^2 + \left(\sqrt{x^2 - cx}\,\right)^2 - 3x\sqrt{x^2 - cx}\left(\frac{2x-c}{2\sqrt{x^2-cx}}\right) = 0$

$x^2 + x^2 - cx - 3x\left(\frac{2x - c}{2}\right) = 0$

$2x^2 - cx - \frac{6x^2}{2} + \frac{3cx}{2} = 0$ Simplificando la primera fracción.

$2x^2 - cx - 3x^2 + \frac{3cx}{2} = 0$ Agrupando términos semejantes.

$2x^2 - 3x^2 - cx + \frac{3cx}{2} = 0$ Reduciendo términos semejantes.

$-x^2 + \frac{3cx - 2cx}{2} = 0$ Reduciendo términos semejantes.

$-x^2 + \frac{cx}{2} = 0 \quad \rightarrow -x^2 + \frac{cx}{2} \neq 0$ No se cumple la igualdad.

Entonces: $y = \sqrt{x^2 - cx}$, no es solución de $(x^2 + y^2)dx - 3xydy = 0$.

5. $\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t(1 + \sin t) + \cos t \end{cases}$, solución de $x = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Solución:

Derivamos paramétrica la función $\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t(1 + \sin t) + \cos t \end{cases}$

$$x = \ln t + \sin t$$

$$\frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}(\ln t + \sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln t) + \frac{d}{dt}(\sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} + \cos t$$

$$y = t(1 + \sin t) + \cos t$$

$$y = t + t\sin t + \cos t$$

$$\frac{d}{dt}y = \frac{d}{dt}(t + t\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(t\sin t) + \frac{d}{dt}(\cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \sin t + t\cos t - \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Sustituyendo $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + t\cos t}{\frac{1}{t} + \cos t}$$

Simplificando la fracción del denominador.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + t\cos t}{\frac{1 + t\cos t}{t}}$$

División de fracciones: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

$$\frac{dy}{dx} = (1 + t\cos t)\left(\frac{t}{1 + t\cos t}\right)$$

Simplificando

$$\frac{dy}{dx} = t$$

Ahora sustituimos "x" y $\frac{dy}{dx}$ en $x = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

$$x = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$\ln t + \sin t = \ln t + \sin t$

Entonces: $\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t(1 + \sin t) + \cos t \end{cases}$, es solución de $x = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

6. $y = c_1 x + c_2 x \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt$, $x > 0$, solución de $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^2 + x)\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$

Solución:

Recuerda: Teorema fundamental del cálculo.

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f[b(x)] \cdot b'(x) - f[a(x)] \cdot a'(x)$$

Calculamos la primera derivada y.

$$y = c_1 x + c_2 x \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(c_1 x + c_2 x \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt\right)$$ Derivada de y con respecto a x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c_1 x) + \frac{d}{dx}(c_2 x \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt)$$ Derivada de una adición.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \frac{d}{dx}(x) \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt + c_2 x \frac{d}{dx}(\int_x^2 \frac{e^t}{t} dt)$$ Teorema fundamental del cálculo.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt + c_2 x \left[\frac{e^2}{2} \cdot \frac{d}{dx}(2) - \frac{e^x}{x} \cdot \frac{d}{dx}(x)\right]$$ Derivada de una constante.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt + c_2 x \left[\frac{e^2}{2} \cdot 0 - \frac{e^x}{x} \cdot 1\right]$$ Producto por 0.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt + c_2 x \left[0 - \frac{e^x}{x}\right]$$ Reduciendo términos.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt + c_2 x \left(-\frac{e^x}{x}\right)$$ Simplificando la fracción.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt - c_2 e^x$$ Primera derivada.

Calculamos la segunda derivada de y.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt - c_2 e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(c_1 + c_2 \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt - c_2 e^x\right)$$ Calculando la segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(c_1) + c_2 \frac{d}{dx}\left(\int_x^2 \frac{e^t}{t} dt\right) - c_2 \frac{d}{dx}(e^x)$$ Derivada de adición y sustracción. Teorema fundamental del cálculo.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 + c_2\left[\frac{e^2}{2}\cdot\frac{d}{dx}(2) - \frac{e^x}{x}\cdot\frac{d}{dx}(x)\right] - c_2e^x$ Derivada de una constante.

$\frac{d^2y}{dx^2} = c_2\left[\frac{e^2}{2}\cdot 0 - \frac{e^x}{x}\cdot 1\right] - c_2e^x$ Producto por 0.

$\frac{d^2y}{dx^2} = c_2\left[0 - \frac{e^x}{x}\right] - c_2e^x$ Reduciendo términos.

$\frac{d^2y}{dx^2} = c_2\left(-\frac{e^x}{x}\right) - c_2e^x$ Simplificando

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{c_2e^x}{x} - c_2e^x$ Segunda derivada.

Ahora sustituimos "y", $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+x)\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+x)\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} + xy + y = 0$$

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{dy}{dx} - y\right) + y = 0$$

$$x^2\left[-\frac{c_2e^x}{x} - c_2e^x - \left(c_1 + c_2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt - c_2e^x\right)\right] - x\left[c_1 + c_2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt - c_2e^x - \left(c_1x + c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt\right)\right] + c_1x + c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt = 0$$

$$x^2\left[-\frac{c_2e^x}{x} - c_2e^x - c_1 - c_2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt + c_2e^x\right] - x\left[c_1 + c_2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt - c_2e^x - c_1x - c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt\right] + c_1x + c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt = 0$$

$$x^2\left[-\frac{c_2e^x}{x} - c_1 - c_2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt\right] - x\left[c_1 + c_2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt - c_2e^x - c_1x - c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt\right] + c_1x + c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt = 0$$

$$-\frac{x^2c_2e^x}{x} - c_1x^2 - c_2x^2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt - c_1x - c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt + c_2xe^x + c_1x^2 + c_2x^2\int_x^2\frac{e^t}{t}dt + c_1x + c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt = 0$$

$$-c_2xe^x + c_2xe^x = 0$$

$$0 = 0$$

Entonces: $y = c_1x + c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt$, es solución de $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+x)\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$.

7. Sea $h(x) = \int_1^x \frac{e^z}{z} dz, x > 0$; hallar los valores de "a" tal que la función f definida por

$f(x) = \frac{e^{ah(x)}}{x}$ satisface a la ecuación diferencial:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (3x - x^2)\frac{dy}{dx} + (1 - x - 3e^{2x})y = 0$$

Solución:

Recuerda: Teorema fundamental del cálculo.

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f[b(x)] \cdot b'(x) - f[a(x)] \cdot a'(x)$$

Sea: $f(x) = y$

Calculamos la primera derivada de y.

$$y = \frac{e^{ah(x)}}{x}$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ah(x)}}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}\left(e^{ah(x)}\right) - e^{ah(x)}\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{ah(x)}\frac{d}{dx}\left(ah(x)\right) - e^{ah(x)}(1)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{axe^{ah(x)}\frac{dh(x)}{dx} - e^{ah(x)}(1)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ah(x)}\left[ax\frac{dh(x)}{dx} - 1\right]}{x^2}$$

Derivamos la función $h(x)$.

$$h(x) = \int_1^x \frac{e^z}{z} dz$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{e^z}{z} dz\right)$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{d}{dx}(x) - \frac{e^1}{1} \cdot \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{e^x}{x} \cdot (1) - e \cdot (0)$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{e^x}{x} - 0$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{e^x}{x}$$

Sustituimos $\frac{dh(x)}{dx}$ en $\frac{dy}{dx}$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ah(x)}\left[ax\left(\frac{e^x}{x}\right) - 1\right]}{x^2}$$

Simplificando la fracción en el numerador.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ah(x)}[ae^x - 1]}{x^2}$$

Transformando en producto de fracciones.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ah(x)}}{x} \cdot \frac{ae^x - 1}{x}$$

Sustituyendo $\frac{e^{ah(x)}}{x}$ por y.

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{ae^x - 1}{x}\right)$$

Simplificando.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ae^x y - y}{x}$$

Primera derivada.

Calculamos la segunda derivada de y.

$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ae^{x}y-y}{x}\right)$ Derivada de y con respecto a x.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ae^{x}y}{x} - \frac{y}{x}\right)$ Derivada de una sustracción.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ae^{x}y}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)$ Derivada de un cociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2}$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\frac{d}{dx}(ae^{x}y)-ae^{x}y\frac{d}{dx}(x)}{x^2} - \frac{x\frac{d}{dx}(y)-y\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$ Derivada implícita.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\left[ay\frac{d}{dx}(e^{x})+ae^{x}\frac{d}{dx}(y)\right]-ae^{x}y(1)}{x^2} - \frac{x\frac{dy}{dx}-y(1)}{x^2}$ Simplificando.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\left[ae^{x}y+ae^{x}\frac{dy}{dx}\right]-ae^{x}y}{x^2} - \frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}$ Eliminando el corchete.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{axe^{x}y+axe^{x}\frac{dy}{dx}-ae^{x}y}{x^2} - \frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}$ Expresando en una sola fracción.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{axe^{x}y+axe^{x}\frac{dy}{dx}-ae^{x}y-x\frac{dy}{dx}+y}{x^2}$ Segunda derivada.

Hasta aquí hemos calculado la primera y la segunda derivada de "y". Ahora se hará un cambió en la notación, es decir, $y = y$, $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$.

$y' = \frac{ae^{x}y-y}{x}$ $\wedge$ $y'' = \frac{axe^{x}y+axe^{x}y'-ae^{x}y-xy'+y}{x^2}$. También en la ecuación diferencial $x^2y'' + (3x - x^2)y' + (1 - x - 3e^{2x})y = 0$, estos cambios nos ayudarán trabajar mejor en el desarrollo del problema.

Sustituyendo y' $\wedge$ y'' en la ecuación diferencial dada.

$$x^2y'' + (3x - x^2)y' + (1 - x - 3e^{2x})y = 0$$

$$x^2\left(\frac{axe^{x}y+axe^{x}y'-ae^{x}y-xy'+y}{x^2}\right) + (3x - x^2)\left(\frac{ae^{x}y-y}{x}\right) + (1 - x - 3e^{2x})y = 0$$

$$axe^{x}y + axe^{x}y' - ae^{x}y - xy' + y + x(3 - x)\left(\frac{ae^{x}y-y}{x}\right) + y - xy - 3e^{2x}y = 0$$

$$axe^{x}y + axe^{x}y' - ae^{x}y - xy' + y + (3 - x)(ae^{x}y - y) + y - xy - 3e^{2x}y = 0$$

$$axe^{x}y + axe^{x}y' - ae^{x}y - xy' + y + 3ae^{x}y - 3y - axe^{x}y + xy + y - xy - 3e^{2x}y = 0$$

$$axe^{x}y' + 2ae^{x}y - xy' - y - 3e^{2x}y = 0$$

$$axe^{x}\left(\frac{ae^{x}y-y}{x}\right) + 2ae^{x}y - x\left(\frac{ae^{x}y-y}{x}\right) - y - 3e^{2x}y = 0$$

$$ae^{x}(ae^{x}y - y) + 2ae^{x}y - (ae^{x}y - y) - y - 3e^{2x}y = 0$$

$$a^{2}e^{x} \cdot e^{x}y - ae^{x}y + 2ae^{x}y - ae^{x}y + y - y - 3e^{2x}y = 0$$

$$a^{2}e^{2x}y - 3e^{2x}y = 0$$

$$a^{2}e^{2x}y = 3e^{2x}y$$

$$a^{2} = \frac{3e^{2x}y}{e^{2x}y}$$

$$a^{2} = 3$$

$$\sqrt{a^{2}} = \sqrt{3}$$

$$a = \pm\sqrt{3}$$

Los valores de “a” tal que la función f satisfaga a la ecuación diferencial es:

$$a_{1} = \sqrt{3} \;\; \wedge \;\; a_{2} = -\sqrt{3}$$

8. Demostrar que la función $y = \left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)^{K}$, satisface a la ecuación diferencial $(1 + x^{2})\frac{d^{2}y}{dx^{2}} + x\frac{dy}{dx} - K^{2}y = 0.$

Solución:

$$y = \left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)^{K}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)^{K}$$ Derivada de y con respecto a x.

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K-1} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ Derivada de $\frac{d}{dx}(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}(u)$.

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K-1} \left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]$ Derivada de una adición.

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K-1} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)\right]$

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K-1} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x+0)\right]$ Reduciendo términos.

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K-1} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\right]$ Simplificando.

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K-1} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$ Expresando una sola fracción.

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K-1} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{-1} \left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ Propiedad de la potenciación.
M.P de igual base.

$\frac{dy}{dx} = K\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{K} \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} \left(\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ Simplificando.

$\frac{dy}{dx} = \frac{K\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K}{\sqrt{x^2+1}}$

Ahora calculemos la segunda derivada de y.

Primero hacemos el cambio de variable, ya que $y = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^K$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ky}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Ky}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ Derivada de y con respecto a x.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}\frac{d}{dx}(Ky) - Ky\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$ Derivada de un cociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{K\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{dy}{dx} - Ky \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$ Sustituyendo "y" y $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{K\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{K\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K}{\sqrt{x^2+1}}-K\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$ Simplificando.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{K^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K-\frac{Kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

Sustituyendo $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ y "y" en la $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-K^2y=0$. Tenemos:

$$(1+x^2)\left[\frac{K^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K-\frac{Kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right]+x\left(\frac{K\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K}{\sqrt{x^2+1}}\right)-K^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K=0$$

$$K^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K-\frac{Kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{Kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K}{\sqrt{x^2+1}}-K^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K=0$$

$0=0$

Entonces: $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^K$, es solución de $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-K^2y=0$.

9. $y=x\sqrt{1-x^2}$, solución de $y\frac{dy}{dx}=x-2x^3$.

Solución:

$y=x\sqrt{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)$ Derivada de "y" con respecto a x.

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ Producto de derivada.

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-x^2}(1)+x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$ Simplificando.

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Ahora sustituimos "y" y $\frac{dy}{dx}$ en $y\frac{dy}{dx}=x-2x^3$.

$\left(x\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=x-2x^3$ Distributiva y M.P de igual base.

$x\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x^3\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = x - 2x^3$

$x(1-x^2) - x^3 = x - 2x^3$ Distributiva.

$x - x^3 - x^3 = x - 2x^3$ Reduciendo términos semejantes.

$x - 2x^3 = x - 2x^3$

Entonces, $y = x\sqrt{1-x^2}$, es solución de $y\frac{dy}{dx} = x - 2x^3$.

10. $y = e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$, solución de $4\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 5y = 0$.

Solución:

Calculamos la primera derivada de $y = e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\cos\frac{1}{2}x\right)$

$\frac{dy}{dx} = \cos\frac{1}{2}x\frac{d}{dx}(e^{-x}) + e^{-x}\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{2}x\right)$

$\frac{dy}{dx} = \cos\frac{1}{2}x\,(-e^{-x}) + e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x\right)$

$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x$

Ahora calculamos la segunda derivada de y.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x\right)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\cos\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\sin\frac{1}{2}x\right)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}(y) - \frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{2}x\frac{d}{dx}(e^{-x}) + e^{-x}\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{1}{2}x\right)\right]$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{2}x\,(-e^{-x}) + e^{-x}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x\right)\right]$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x\right]$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(-e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}\cos\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x\right) + \left(+\frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x + e^{-x}\sin\frac{1}{2}x$$

Ahora sustituimos "y", $\frac{dy}{dx}$, y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $4\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 5y = 0$.

$$4\left(\frac{3}{4}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x + e^{-x}\sin\frac{1}{2}x\right) + 8\left(-e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin\frac{1}{2}x\right) + 5\left(e^{-x}\cos\frac{1}{2}x\right) = 0$$

$$4\cdot\frac{3}{4}e^{-x}\cos\frac{1}{2}x + 4e^{-x}\sin\frac{1}{2}x - 8e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - 8\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + 5e^{-x}\cos\frac{1}{2}x = 0$$

$$3e^{-x}\cos\frac{1}{2}x + 4e^{-x}\sin\frac{1}{2}x - 8e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - 4e^{-x}\sin\frac{1}{2}x + 5e^{-x}\cos\frac{1}{2}x = 0$$

$$8e^{-x}\cos\frac{1}{2}x - 8e^{-x}\cos\frac{1}{2}x = 0$$

$$0 = 0$$

Entonces, $y = e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$, es solución de $4\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 5y = 0$.

11. $x = ye^{Cy+1}$, solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$.

Solución:

$x = ye^{Cy+1}$

Aplicando logaritmo natural, tenemos:

$\ln x = \ln(ye^{Cy+1})$

$\ln x = \ln y + \ln e^{Cy+1}$ $\quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln x = \ln y + (Cy + 1)\ln e$ $\quad \ln u^n = n\ln u$

$\ln x = \ln y + (Cy + 1)1$ $\quad \ln e = 1$

$\ln x = \ln y + Cy + 1$

Derivando implícitamente con respecto a x la función.

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}(\ln y + Cy + 1)$

$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(\ln y) + \frac{d}{dx}(Cy) + \frac{d}{dx}(1)$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + C\frac{dy}{dx} + 0$

$\frac{1}{x} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} + C\right)$

$$\frac{1}{x} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{1 + Cy}{y}\right)$$

$\left(\frac{y}{1+Cy}\right)\frac{1}{x} = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{y}{Cy + 1}\right)$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$.

$\frac{1}{x}\left(\frac{y}{Cy+1}\right) = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$ (*)

Se observa que no hay una igualdad, ya que tenemos $Cy + 1$.

Despejando $Cy+1$ de $\ln x = \ln y + Cy + 1$, se obtiene:

$\ln x = \ln y + Cy + 1$

$\ln x - \ln y = Cy + 1$

$Cy + 1 = \ln x - \ln y$, sustituyendo en (*).

$$\frac{1}{x}\left(\frac{y}{\ln x - \ln y}\right) = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$$

$$\frac{y}{x(\ln x - \ln y)} = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$$

Entonces, $x = ye^{Cy+1}$, es solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$.

12. $y = \frac{\sin x}{3x}$, solución de $x\frac{dy}{dx} + y = \cos x$.

Solución:

Calculamos la primera derivada de y.

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{3x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(3x)}{(3x)^2}$$ Derivada de un cociente.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x(\cos x) - \sin x\,(3)}{9x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x\cos x - 3\sin x}{9x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x\cos x - \sin x)}{9x^2}$$ Factorizando por 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{3x^2}$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ en $x\frac{dy}{dx} + y = \cos x$, se obtiene:

$x\left(\frac{x\cos x-\sin x}{3x^2}\right)+\frac{\sin x}{3x}=\cos x$ Simplificando x.

$\frac{x\cos x-\sin x}{3x}+\frac{\sin x}{3x}=\cos x$ Separando en fracciones homogéneas.

$\frac{x\cos x}{3x}-\frac{\sin x}{3x}+\frac{\sin x}{3x}=\cos x$ Reduciendo términos semejantes.

$\frac{\cos x}{3}\neq\cos x$

Entonces, $y=\frac{\sin x}{3x}$, no es solución de $x\frac{dy}{dx}+y=\cos x$.

13. $\begin{cases}x=te^t\\y=e^{-t}\end{cases}$, solución de $(1+xy)\frac{dy}{dx}+y^2=0$.

Solución:

Derivamos paramétricamente la función $\begin{cases}x=te^t\\y=e^{-t}\end{cases}$

$x=te^t$

$\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}(te^t)$

$\frac{dx}{dt}=e^t\frac{d}{dt}(t)+t\frac{d}{dt}(e^t)$

$\frac{dx}{dt}=e^t(1)+te^t$

$\frac{dx}{dt}=e^t+te^t$

$y=e^{-t}$

$\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}(e^{-t})$

$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ Definición de derivada paramétrica.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^{-t}}{e^{t}+te^{t}}$$

Ahora sustituyendo "x", "y" y $\frac{dy}{dx}$ en $(1+xy)\frac{dy}{dx}+y^2=0$, se obtiene.

$$[1+te^{t}\cdot e^{-t}]\frac{-e^{-t}}{e^{t}+te^{t}}+(e^{-t})^2=0$$

$$[1+te^{0}]\frac{-e^{-t}}{e^{t}(1+t)}+e^{-2t}=0$$ M.P de igual base.

$$[1+t]\frac{-e^{-t}e^{-1}}{(1+t)}+e^{-2t}=0$$ Simplificando.

$$-e^{-2t}+e^{-2t}=0$$

$$0=0$$

Entonces, $\begin{cases}x=te^{t}\\ y=e^{-t}\end{cases}$, es solución de $(1+xy)\frac{dy}{dx}+y^2=0$.

14. $\begin{cases}x=t+\sin^{-1}t\\ y=\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}\end{cases}$, solución de $x=y'+\sin^{-1}y'$.

Solución:

Derivamos paramétricamente la función $\begin{cases}x=t+\sin^{-1}t\\ y=\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}\end{cases}$.

$$x=t+\sin^{-1}t$$

$$\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}(t+\sin^{-1}t)$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(t)+\frac{d}{dt}(\sin^{-1}t)$$

$$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y=\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}$$

$$\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right)-\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{2}-\left(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=t+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t\left(1+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=t$$

$$y'=t$$

Ahora sustituimos "x" y y' en $x=y'+\sin^{-1}y'$, se obtiene.

$$t+\sin^{-1}t=t+\sin^{-1}t$$

Entonces, $\begin{cases} x=t+\sin^{-1}t \\ y=\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}\end{cases}$, es solución de $x=y'+\sin^{-1}y'$.

15. $y\ln y=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$, solución de $x\frac{dy}{dx}+x\ln y=x\sin x+y\ln y$.

Solución:

Derivamos implícitamente con respecto a x la función $y\ln y=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

$$\frac{d}{dx}(y\ln y)=\frac{d}{dx}\left(x\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\right)$$

Recuerda: Teorema fundamental del cálculo.
$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_0^{a(x)}f(t)dt=f[a(x)]\cdot a'(x)}$$

$$\ln y\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(\ln y)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\right)$$

$$\ln y\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt(1)+x\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\ln y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \sin x$$

$$\frac{dy}{dx}(\ln y + 1) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \sin x}{\ln y + 1}$$

Ahora sustituimos en $x\frac{dy}{dx} + x\ln y = x\sin x + y\ln y$.

$$x\left(\frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \sin x}{\ln y + 1}\right) + x\left(\frac{x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{y}\right) = x\sin x + x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\frac{x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + x\sin x}{\ln y + 1} + \frac{x^2\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{y} = x\sin x + x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\frac{x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{\ln y + 1} + \frac{x\sin x}{\ln y + 1} + \frac{x^2\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{y} \neq x\sin x + x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Entonces, $y\ln y = x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, no es solución de $x\frac{dy}{dx} + x\ln y = x\sin x + y\ln y$.

16. $y = C_1 \ln x + C_2 x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}$, $x > 1$, de $(x^2\ln^2 x)\frac{d^2y}{dx^2} - (x\ln x)\frac{dy}{dx} + (\ln x + 1)y = 0$.

Solución:

Calculamos la primera deriva de y.

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(C_1 \ln x + C_2 x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{d}{dx}(\ln x) + C_2 \frac{d}{dx}\left(x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2\left[\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}\left(\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} + C_2\left[\int_x^e \frac{dt}{\ln t}(1) + x\left(\frac{1}{\ln e}\cdot e' - \frac{1}{\ln x}\cdot x'\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} + C_2\left[\int_x^e \frac{dt}{\ln t} + x\left(\frac{1}{1}\cdot 0 - \frac{1}{\ln x}\cdot 1\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} + C_2\left[\int_x^e \frac{dt}{\ln t} + x\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} + C_2\left[\int_x^e \frac{dt}{\ln t} - \frac{x}{\ln x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} + C_2\int_x^e \frac{dt}{\ln t} - \frac{C_2 x}{\ln x}$$

Calculamos la segunda derivada de y.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1}{x} + C_2\int_x^e \frac{dt}{\ln t} - \frac{C_2 x}{\ln x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + C_2\frac{d}{dx}\left(\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right) - C_2\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1\frac{d}{dx}(x^{-1}) + C_2\left(\frac{1}{\ln e}\cdot e' - \frac{1}{\ln x}\cdot x'\right) - C_2\left[\frac{(\ln x)\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C_1x^{-2} + C_2\left(\frac{1}{\ln e}\cdot 0 - \frac{1}{\ln x}\cdot 1\right) - C_2\left[\frac{(\ln x)1 - x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{C_1}{x^2} + C_2\left(-\frac{1}{\ln x}\right) - C_2\left[\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{C_1}{x^2} - \frac{C_2}{\ln x} - \frac{C_2(\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Sustituyendo "y", $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $(x^2\ln^2 x)\frac{d^2y}{dx^2} - (x\ln x)\frac{dy}{dx} + (\ln x + 1)y = 0$, se obtiene.

$$(x^2 \ln^2 x)\left[-\frac{C_1}{x^2}-\frac{C_2}{\ln x}-\frac{C_2(\ln x-1)}{\ln^2 x}\right]-(x\ln x)\left(\frac{C_1}{x}+C_2\int_x^e \frac{dt}{\ln t}-\frac{C_2 x}{\ln x}\right)+(\ln x+1)\left(C_1 \ln x+C_2 x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right)=0$$

$$(x^2 \ln^2 x)\left[\frac{-C_1\ln^2 x-C_2x^2\ln x-C_2x^2(\ln x-1)}{x^2\ln^2 x}\right]-(x\ln x)\left(\frac{C_1\ln x+C_2x\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}-C_2x^2}{x\ln x}\right)+(\ln x+1)\left(C_1 \ln x+C_2 x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right)=0$$

$$-C_1\ln^2 x-C_2x^2\ln x-C_2x^2(\ln x-1)-\left(C_1\ln x+C_2x\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}-C_2x^2\right)+(\ln x+1)\left(C_1 \ln x+C_2 x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right)=0$$

$$-C_1\ln^2 x-C_2x^2\ln x-C_2x^2\ln x+C_2x^2-C_1\ln x-C_2x\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}+C_2x^2+(\ln x+1)\left(C_1 \ln x+C_2 x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}\right)=0$$

$$-C_1\ln^2 x-2C_2x^2\ln x+2C_2x^2-C_1\ln x-C_2x\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}+C_1\ln^2 x+C_2x\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}+C_1\ln x+C_2x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}=0$$

$$-2C_2x^2\ln x+2C_2x^2+C_1\ln x+C_2x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}=0$$

$$2C_2x^2-2C_2x^2\ln x+C_1\ln x+C_2x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}\neq 0$$

Por lo tanto, no se cumple la igualdad.

$y=C_1\ln x+C_2x\int_x^e\frac{dt}{\ln t},\ x>1$, no es solución de $(x^2\ln^2 x)\frac{d^2y}{dx^2}-(x\ln x)\frac{dy}{dx}+(\ln x+1)y=0$.

17. Determine los valores de m para los que la función $y=x^m$ es una solución de la ecuación diferencial $3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+11x\frac{dy}{dx}-3y=0$.

Solución:

Derivamos y con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}x^m$$

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$$

Calculando la segunda derivada de y.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(mx^{m-1})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m\frac{d}{dx}(x^{m-1})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m[(m-1)x^{m-2}]$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, se obtiene.

$$3x^2 \cdot m[(m-1)x^{m-2}] + 11x \cdot mx^{m-1} - 3x^m = 0$$

$$3x^2m(m-1)x^{m-2} + 11xmx^{m-1} - 3x^m = 0$$

$$3x^2m(m-1)x^mx^{-2} + 11xmx^mx^{-1} - 3x^m = 0$$

$$3x^2m(m-1)x^m\frac{1}{x^2} + 11xmx^m\frac{1}{x} - 3x^m = 0$$

$$3m(m-1)x^m + 11mx^m - 3x^m = 0$$

$$x^m[3m(m-1) + 11m - 3] = 0$$

$$3m^2 - 3m + 11m - 3 = \frac{0}{x^m}; \quad x^m \neq 0$$

$3m^2 + 8m - 3 = 0$, factorizando, se obtiene.

$$(m+3)(3m-1) = 0$$

$$m + 3 = 0 \qquad \wedge \qquad 3m - 1 = 0$$

$$m = -3 \qquad \wedge \qquad 3m = 1$$

$$m = -3 \qquad \wedge \qquad m = \frac{1}{3}$$

Los valores de m para los que la función $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial $3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ es:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m_1 = -3} \\ \boldsymbol{m_2 = \frac{1}{3}} \end{cases}$$

18. $y = x\cos(\ln x)$, solución de $x^2y'' - xy' + 2y = 0$.

Solución:

Derivamos y con respecto a x.

$y' = [x\cos(\ln x)]'$

$y' = \cos(\ln x)\cdot x' + x[\cos(\ln x)]'$

$y' = \cos(\ln x)\cdot 1 + x(-\sin(\ln x))(\ln x)'$

$y' = \cos(\ln x) + x(-\sin(\ln x))\dfrac{1}{x}$

$y' = \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$

Calculamos la segunda de derivada de y.

$(y')' = [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]'$

$y'' = [\cos(\ln x)]' - [\sin(\ln x)]'$

$y'' = -\sin(\ln x)\cdot(\ln x)' - \cos(\ln x)\cdot(\ln x)'$

$y'' = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$y'' = -\frac{\sin(\ln x)}{x} - \frac{\cos(\ln x)}{x}$

$y'' = \frac{-\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{x}$

Sustituyendo y', y'' en $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, se obtiene.

$x^2\left[\frac{-\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{x}\right] - x[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + 2x\cos(\ln x) = 0$

$x[-\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0$

$-x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0$

$-2x\cos(\ln x) + 2x\cos(\ln x) = 0$

$0 = 0$

Entonces, $y = x\cos(\ln x)$, es solución de $x^2y'' - xy' + 2y = 0$.

19. $y = e^{3x} \cos 2x$, solución de $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Solución:

Derivamos y con respecto a x.

$y' = (e^{3x} \cos 2x)'$

$y' = \cos 2x\,(e^{3x})' + e^{3x}(\cos 2x)'$

$y' = \cos 2x\,(3e^{3x}) + e^{3x}[-\sin 2x](2x)'$

$y' = 3e^{3x} \cos 2x - e^{3x} \sin 2x \cdot (2)$

$y' = 3e^{3x} \cos 2x - 2e^{3x} \sin 2x$

$y' = 3y - 2e^{3x} \sin 2x$ $\qquad y = e^{3x} \cos 2x$

Calculamos la segunda derivada de y.

$(y')' = (3y - 2e^{3x} \sin 2x)'$

$y'' = (3y)' - (2e^{3x} \sin 2x)'$

$y'' = 3y' - 2[\sin 2x\,(e^{3x})' + e^{3x}(\sin 2x)']$

$y'' = 3y' - 2[\sin 2x\,(3e^{3x}) + e^{3x} 2 \cos 2x]$

$y'' = 3y' - 2[3e^{3x} \sin 2x + 2e^{3x} \cos 2x]$

$y'' = 3y' - 6e^{3x} \sin 2x - 4e^{3x} \cos 2x$, sustituyendo $\qquad y' = 3e^{3x} \cos 2x - 2e^{3x} \sin 2x$

$y'' = 3(3e^{3x} \cos 2x - 2e^{3x} \sin 2x) - 6e^{3x} \sin 2x - 4e^{3x} \cos 2x$

$y'' = 9e^{3x} \cos 2x - 6e^{3x} \sin 2x - 6e^{3x} \sin 2x - 4e^{3x} \cos 2x$

$y'' = 5e^{3x} \cos 2x - 12e^{3x} \sin 2x$

Sustituyendo y', y'' en $y'' - 6y' + 13y = 0$, se obtiene.

$5e^{3x} \cos 2x - 12e^{3x} \sin 2x - 6(3e^{3x} \cos 2x - 2e^{3x} \sin 2x) + 13e^{3x} \cos 2x = 0$

$5e^{3x} \cos 2x - 12e^{3x} \sin 2x - 18e^{3x} \cos 2x + 12e^{3x} \sin 2x + 13e^{3x} \cos 2x = 0$

$18e^{3x} \cos 2x - 18e^{3x} \cos 2x = 0$

$0 = 0$

Entonces, $y = e^{3x} \cos 2x$, es solución de $y'' - 6y' + 13y = 0$.

20. $\sin y + xy - x^3 = 2$, solución de $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \sin y - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3x^2 - y}$.

Solución:

En cálculo III se aprendió que $z = f(x, y)$, función de dos variables.

Para calcular la derivada implícita de la función $f(x, y)$, se cumple: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)]}{\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)]}$

si $f(x, y) = 0$.

Igualamos $\sin y + xy - x^3 = 2$ a cero, se obtiene.

$\sin y + xy - x^3 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad f(x, y) = \sin y + xy - x^3 - 2$.

Calculamos la derivada implícita de $f(x, y)$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)]}{\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}[\sin y + xy - x^3 - 2]}{\frac{\partial}{\partial y}[\sin y + xy - x^3 - 2]}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\sin y + \frac{\partial}{\partial x}xy - \frac{\partial}{\partial x}x^3 - \frac{\partial}{\partial x}2}{\frac{\partial}{\partial y}\sin y + \frac{\partial}{\partial y}xy - \frac{\partial}{\partial y}x^3 - \frac{\partial}{\partial y}2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0 + y - 3x^2 - 0}{\cos y + x - 0 - 0}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y - 3x^2}{\cos y + x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x + cos\, y}$$ Primera derivada.

Calculamos la derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x + cos\, y}$ con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+cos\,y)\frac{d}{dx}(3x^2-y)-(3x^2-y)\frac{d}{dx}(x+cos\,y)}{(x+cos\,y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+cos\,y)\left(3\frac{d}{dx}x^2-\frac{d}{dx}y\right)-(3x^2-y)\left(\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}cos\,y\right)}{(x+cos\,y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+cos\,y)\left(3\cdot 2x-\frac{dy}{dx}\right)-(3x^2-y)\left(1-\sin y\frac{dy}{dx}\right)}{(x+cos\,y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+cos\,y)\left(6x-\frac{dy}{dx}\right)-\left[3x^2-3x^2\sin y\frac{dy}{dx}-y+y\sin y\frac{dy}{dx}\right]}{(x+cos\,y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x(x+cos\,y)-(x+cos\,y)\frac{dy}{dx}-3x^2+3x^2\sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)+y-y\sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{(x+cos\,y)^2}$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}$, se obtiene.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x(x+cos\,y)-(x+cos\,y)\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}-3x^2+3x^2\sin y\left(\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}\right)+y-y\sin y\left(\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}\right)}{(x+cos\,y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x(x+cos\,y)}{(x+cos\,y)^2}-\frac{(x+cos\,y)\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}}{(x+cos\,y)^2}-\frac{3x^2}{(x+cos\,y)^2}+\frac{3x^2\left(\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}\right)\sin y}{(x+cos\,y)^2}+\frac{y}{(x+cos\,y)^2}-\frac{y\frac{3x^2-y}{x+cos\,y}\sin y}{(x+cos\,y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x}{x+cos\,y}-\frac{3x^2-y}{(x+cos\,y)^2}-\frac{3x^2}{(x+cos\,y)^2}+\frac{3x^2(3x^2-y)\sin y}{(x+cos\,y)^3}+\frac{y}{(x+cos\,y)^2}-\frac{y(3x^2-y)\sin y}{(x+cos\,y)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x}{x+cos\,y}-\frac{3x^2-y+3x^2-y}{(x+cos\,y)^2}+\frac{3x^2(3x^2-y)\sin y-y(3x^2-y)\sin y}{(x+cos\,y)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x}{x+cos\,y}-\frac{6x^2-2y}{(x+cos\,y)^2}+\frac{(9x^4-3x^2y)\sin y-(3x^2y-y^2)\sin y}{(x+cos\,y)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x}{x+cos\,y}-\frac{6x^2-2y}{(x+cos\,y)^2}+\frac{(9x^4-3x^2y-3x^2y+y^2)\sin y}{(x+cos\,y)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x}{x+cos\,y}-\frac{6x^2-2y}{(x+cos\,y)^2}+\frac{(9x^4-6x^2y+y^2)\sin y}{(x+cos\,y)^3}\qquad(*)$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\sin y-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3x^2-y}$ para comprobar que se cumple la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ $(*)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x\left(\frac{3x^2-y}{x+\cos y}\right) + \left(\frac{3x^2-y}{x+\cos y}\right)^3 \sin y - 2\left(\frac{3x^2-y}{x+\cos y}\right)^2}{3x^2-y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x \cdot \frac{3x^2-y}{x+\cos y}}{3x^2-y} + \frac{\frac{(3x^2-y)^3}{(x+\cos y)^3}\sin y}{3x^2-y} - \frac{2 \cdot \frac{(3x^2-y)^2}{(x+\cos y)^2}}{3x^2-y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x}{x+\cos y} + \frac{(3x^2-y)^2 \sin y}{(x+\cos y)^3} - \frac{2(3x^2-y)}{(x+\cos y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x}{x+\cos y} + \frac{(9x^4-6x^2y+y^2)\sin y}{(x+\cos y)^3} - \frac{6x^2-2y}{(x+\cos y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x}{x+\cos y} - \frac{6x^2-2y}{(x+\cos y)^2} + \frac{(9x^4-6x^2y+y^2)\sin y}{(x+\cos y)^3} \quad (**)$$

Se verifica que la ecuación $(*)$ y $(**)$ son iguales.

Entonces, $\sin y + xy - x^3 = 2$ es solución de $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \sin y - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3x^2-y}$.

3.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de variable separable

3.3.1 Soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de variable separable

• Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, y determine una solución particular donde se dé una condición inicial.

1. $(x+1)\frac{dy}{dx} = x$

Solución:

$(x+1)\frac{dy}{dx} = x$ — Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{x+1}$.

$\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}\cdot x$ — Simplificando.

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+1}$

$dy = \frac{x}{x+1}dx$ — Escribiendo en cada miembro su diferencial con su respectiva variable.

$\int dy = \int \frac{x}{x+1}dx$ — Integrando ambos miembros.

$y + c_1 = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$ — Sumando y restando 1 en el integrando.

$y + c_1 = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$ — Separando en fracciones homogéneas.

$y + c_1 = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$y + c_1 = \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx$ — Diferencia de integrales.

$y + c_1 = x - \ln|x+1| + c_2$ — Integración de $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c$.

$y = x - \ln|x+1| + c_2 - c_1$

$y = x - \ln|x+1| + C$ $\qquad C = c_2 - c_1$

Por lo tanto, $\boldsymbol{y = x - \ln|x+1| + C}$ es solución general de $(x+1)\frac{dy}{dx} = x$.

2. $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

Solución:

$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

$$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x} \cdot e^{-y}$$

Propiedad de la potenciación.
M.P de igual base.

$$e^x y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} + \frac{e^{-2x}}{e^y}$$

Exponente negativo.

$$e^x y \frac{dy}{dx} = \frac{1 + e^{-2x}}{e^y}$$

Agrupando las fracciones homogéneas.

$$e^y y \frac{dy}{dx} = \frac{1 + e^{-2x}}{e^x}$$

Agrupando la misma variable en cada miembro de la ecuación,

$$e^y y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x} + \frac{e^{-2x}}{e^x}$$

Separando en fracciones homogéneas.

$$e^y y \frac{dy}{dx} = e^{-x} + e^{-2x} \cdot e^{-x}$$

$$e^y y \frac{dy}{dx} = e^{-x} + e^{-3x}$$

$$e^y y dy = (e^{-x} + e^{-3x}) dx$$

$$\int e^y y dy = \int (e^{-x} + e^{-3x}) dx$$

$$\int e^y y dy = \int e^{-x} dx + \int e^{-3x} dx$$

$$I = -e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + c_2$$

Sea: $I = \int e^y y dy$

Resolviendo la integración por parte.

$u = y$ $\quad$ $dv = e^y dy$

$\frac{du}{dy} = 1$ $\quad$ $\int dv = \int e^y dy$

$v = e^y$

$du = dy$

$I = ye^y - \int e^y dy$

$I = ye^y - e^y + c_1$

$$ye^y - e^y + c_1 = -e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + c_2$$

$$ye^y - e^y + e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} = c_2 - c_1$$

$$ye^y - e^y + e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} = C \, , \; C = c_2 - c_1$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{ye^y - e^y + e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} = C}$ es solución de general de $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$.

3. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$

Solución:

$(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$

$[(1 + x^2) + y^2(1 + x^2)]dy = y^2dx$

$(1 + x^2)(1 + y^2)dy = y^2dx$

$\frac{1+y^2}{y^2}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$

$\int \frac{1+y^2}{y^2}dy = I$

$\int \left(\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}\right) dy = \tan^{-1} x + c_2$

$\int (y^{-2} + 1)dy = \tan^{-1} x + c_2$

$\int y^{-2}dy + \int dy = \tan^{-1} x + c_2$

$-y^{-1} + y = \tan^{-1} x + c_2 - c_2$

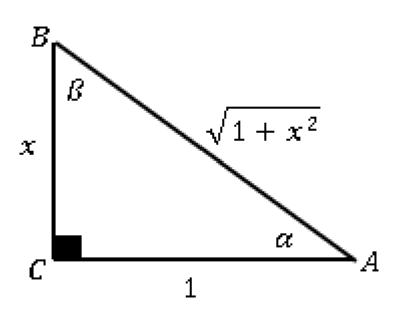
$-\frac{1}{y} + y = \tan^{-1} x + C$, $C = c_2 - c_2$

$y - \frac{1}{y} - \tan^{-1} x = C$

$\frac{y^2 - 1}{y} - \tan^{-1} x = C$

Sea: $I = \int \frac{1}{1+x^2}dx$

Resolviendo por sustitución trigonométrica.



$\tan\alpha = \frac{x}{1}$

$\tan\alpha = x$

$x = \tan\alpha$

$x^2 = (\tan\alpha)^2$

$x^2 = \tan^2\alpha$

Derivando "x".

$\frac{d}{d\alpha}x = \frac{d}{d\alpha}(\tan\alpha)$

$\frac{dx}{d\alpha} = \sec^2\alpha$

$dx = \sec^2\alpha\, d\alpha$

$I = \int \frac{1}{1+x^2}dx$

$I = \int \frac{1}{1+\tan^2\alpha}\sec^2\alpha\, d\alpha$

$I = \int \frac{\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha}d\alpha$, $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

$I = \int d\alpha$

$I = \alpha + c_2$

$\tan\alpha = x$

$\alpha = \tan^{-1} x$

$\therefore I = \tan^{-1} x + c_2$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\frac{y^2-1}{y} - \tan^{-1} x = C}$ es solución general de $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$.

4. $\sec y \frac{dy}{dx} + \sin(x - y) = \sin(x + y)$

Solución:

$\sec y \frac{dy}{dx} + \sin(x - y) = \sin(x + y)$

$\sec y \frac{dy}{dx} = \sin(x + y) - \sin(x - y)$ Aplicando $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$.

$\sec y \frac{dy}{dx} = \sin x \cos y + \sin y \cos x - (\sin x \cos y - \sin y \cos x)$

$\sec y \frac{dy}{dx} = \sin x \cos y + \sin y \cos x - \sin x \cos y + \sin y \cos x$ Reduciendo términos semejantes,

$\sec y \frac{dy}{dx} = 2 \sin y \cos x$

$\sec y \, dy = 2 \sin y \cos x \, dx$ Despejando la diferencial en cada miembro con su respectiva variable.

$\frac{\sec y}{2 \sin y} dy = \cos x \, dx$ Aplicando la identidad: $\sec y = \frac{1}{\cos y}$.

$\frac{1}{\cos y} \cdot \frac{1}{2 \sin y} dy = \cos x \, dx$

$\frac{1}{2 \sin y \cos y} dy = \cos x \, dx$

$\frac{1}{\sin 2y} dy = \cos x \, dx$

$\csc 2y \, dy = \cos x \, dx$

$\int \csc 2y \, dy = \int \cos x \, dx$

$\int \csc 2y \, dy = \sin x + c_2$

Sea: $I = \int \csc 2y \, dy$

$I = \sin x + c_2$

Calculando la integral I.

$$\frac{1}{2}\ln(\csc 2y-\cot 2y)+c_2=\sin x+c_2$$

$$\frac{1}{2}\ln(\csc 2y-\cot 2y)=\sin x+c_2-c_1$$

$$\ln(\csc 2y-\cot 2y)=2(\sin x+c_2-c_1)$$

$$\ln(\csc 2y-\cot 2y)=2\sin x+2(c_2-c_1)$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sin 2y}-\frac{\cos 2y}{\sin 2y}\right)=2\sin x+2(c_2-c_1)$$

$$\ln\left(\frac{1-\cos 2y}{\sin 2y}\right)=2\sin x+2(c_2-c_1)$$

$$\ln\left[\frac{1-(\cos^2 y-\sin^2 y)}{\sin 2y}\right]=2\sin x+2(c_2-c_1)$$

$$\ln\left(\frac{1-\cos^2 y+\sin^2 y}{\sin 2y}\right)=2\sin x+2(c_2-c_1)$$

$$\ln\left(\frac{\sin^2 y+\sin^2 y}{\sin 2y}\right)=2\sin x+2(c_2-c_1)$$

$$\ln\left(\frac{2\sin^2 y}{\sin 2y}\right)=2\sin x+C \quad ,C=2(c_2-c_1)$$

$$\ln\left(\frac{2\sin^2 y}{2\sin y\cos y}\right)=2\sin x+C$$

$$\ln\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)=2\sin x+C$$

$$\ln(\tan y)=2\sin x+C$$

$$e^{\ln(\tan y)}=e^{2\sin x+C}$$

$$\tan y=e^{2\sin x}\cdot e^{c}$$

$$\tan y=e^{2\sin x}\cdot K \quad ,K=e^{c}$$

$$\tan y=Ke^{2\sin x}$$

$$y=\tan^{-1}\left(Ke^{2\sin x}\right)$$

Sea: $I=\int \csc 2y\,dy$

Cambio de variable.

$I=\int \csc 2y\,dy$	$u=2y$
$I=\int \csc u\,\frac{du}{2}$	$\frac{d}{dy}u=\frac{d}{dy}(2y)$
$I=\frac{1}{2}\int \csc u\,du$	$\frac{du}{dy}=2$
$I=\frac{1}{2}\int \csc u\,(1)du$	$du=2dy$
$I=\frac{1}{2}\int \csc u\left(\frac{\csc u-\cot u}{\csc u-\cot u}\right)du$	$\frac{du}{2}=dy$
$I=\frac{1}{2}\int \frac{\csc^2 u-\csc u\cot u}{\csc u-\cot u}du$	$dy=\frac{du}{2}$
$I=\frac{1}{2}\int \frac{-\csc u\cot u+\csc^2 u}{\csc u-\cot u}du$	

$$I=\frac{1}{2}\ln(\csc u-\cot u)+c_2$$

Escribiendo la integral con la variable original.

$$I=\frac{1}{2}\ln(\csc 2y-\cot 2y)+c_2$$

Propiedad de logaritmo: $e^{\ln u}=u$.
Propiedad de la potenciación.
M.P de igual base.

Por lo tanto, $\boldsymbol{y=\tan^{-1}(Ke^{2\sin x})}$ es solución general de $\sec y\frac{dy}{dx}+\sin(x-y)=\sin(x+y)$.

5. $x^3dy + xydx = x^2dy + 2ydx$; $y(2) = e$

Solución:

$x^3dy + xydx = x^2dy + 2ydx$ **(*)**

$x^3dy - x^2dy = 2ydx - xydx$

Agrupando la diferencial dx y dy en cada miembro de la ecuación

$(x^3 - x^2)dy = (2y - xy)dx$

Factorizando dx y dy en su miembro de la ecuación.

$(x^3 - x^2)dy = y(2 - x)dx$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2 - x}{x^3 - x^2}dx$$

Agrupando la diferencial dx y dy en cada miembro de la ecuación con su variable.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2 - x}{x^3 - x^2}dx$$

$\ln y = I$

$$\ln y = \int \left(\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}\right)dx$$

$$\ln y = \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$\ln y = \int \frac{1}{x - 1}dx - \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{2}{x^2}dx$$

$$\ln y = \int \frac{1}{x - 1}dx - \int \frac{1}{x}dx - 2\int x^{-2}dx$$

$$\ln y = \ln(x - 1) - \ln x + 2x^{-1} + k_1$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{x - 1}{x}\right) + \frac{2}{x} + k_1$$

$$\ln y - \ln\left(\frac{x - 1}{x}\right) = \frac{2}{x} + k_1$$

$$\ln\left(\frac{y}{\frac{x - 1}{x}}\right) = \frac{2}{x} + k_1$$

Sea: $I = \int \frac{2-x}{x^3-x^2}dx$

Resolviendo por fracciones parciales.

$$I = \int \frac{2-x}{x^3-x^2}dx$$

$$I = \int \frac{2-x}{(x-1)x^2}dx$$

$$I = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}\right)dx$$

$$\frac{2-x}{(x-1)x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$$2 - x = Ax^2 + Bx(x - 1) + C(x - 1)$$

$$-x + 2 = Ax^2 + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$-x + 2 = (A + B)x^2 + (-B + C)x - C$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = -1 \\ -C = 2 \end{cases}$$

$B = C + 1$ $A = -B$

$B = -2 + 1$ $A = -(-1)$

$\boldsymbol{C = -2}$ $\boldsymbol{B = -1}$ $\boldsymbol{A = 1}$

$$\ln\left(\frac{xy}{x-1}\right) = \frac{2}{x} + k_1$$

$$e^{\ln\left(\frac{xy}{x-1}\right)} = e^{\frac{2}{x}+k_1}$$

$$\frac{xy}{x-1} = e^{\frac{2}{x}} \cdot e^{k_1}$$

$$\frac{xy}{x-1} = e^{\frac{2}{x}} \cdot K\ ;\ \ K = e^{k_1}$$

$$xy = K(x-1)e^{\frac{2}{x}}$$

Así, $xy = K(x-1)e^{\frac{2}{x}}$ es solución general de la ED **(*)**.

Ahora calculamos la solución particular de la ED **(*)**, con la condición $y(2) = e$.

Es decir, $x = 2 \ \wedge \ y = e$.

$$xy = K(x-1)e^{\frac{2}{x}}$$

$$2e = K(2-1)e^{\frac{2}{2}}$$

$$2e = Ke$$

$$\frac{2e}{e} = K$$

$$2 = K \qquad \therefore K = 2$$

$$xy = 2(x-1)e^{\frac{2}{x}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2(x-1)e^{\frac{2}{x}}}{x}}$$

6. $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0 \,; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Solución:

$$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\sin y}} + \frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\sin y}}$$

Propiedad de la radicación.
Raíz de un cociente.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sqrt{1+\sin y}}$$

Agrupando la diferencial dx y dy en cada miembro con su variable.

$$\sqrt{1+\sin y}\, dy = -\sqrt{1-\cos 2x}\, dx$$

$$\sqrt{(1+\sin y)\cdot 1}dy = -\sqrt{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}dx$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+\sin y}{1}\right)\left(\frac{1-\sin y}{1-\sin y}\right)}\, dy = -\sqrt{1-\cos^2 x + \sin^2 x}\, dx$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin^2 y}{1-\sin y}}\, dy = -\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x}\, dx$$

$$\sqrt{\frac{\cos^2 y}{1-\sin y}}\, dy = -\sqrt{2\sin^2 x}\, dx$$

$$\frac{\sqrt{\cos^2 y}}{\sqrt{1-\sin y}}\, dy = -\sqrt{2}\sin x\, dx$$

$$\frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin y}}\, dy = -\sqrt{2}\sin x\, dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin y}}\, dy = \int\left(-\sqrt{2}\sin x\, dx\right)$$

$$\int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin y}}\, dy = -\sqrt{2}\int \sin x\, dx$$

$$I = -\sqrt{2}(-\cos x) + C_1$$

$$-2\sqrt{1-\sin y} + C_2 = \sqrt{2}\cos x + C_1$$

Sea: $I = \int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin y}}\, dy$

Resolviendo por sustitución.

$I = \int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin y}}\, dy \qquad u = 1 - \sin y$

$I = \int \frac{\cos y\, dy}{\sqrt{1-\sin y}} \qquad \frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}(1-\sin y)$

$I = \int \frac{-du}{\sqrt{u}} \qquad \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}(1) - \frac{d}{dy}(\sin y)$

$I = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} \qquad \frac{du}{dy} = -\cos y$

$I = -\int \frac{2du}{2\sqrt{u}} \qquad -du = \cos y\, dy$

$I = -2\int \frac{du}{2\sqrt{u}}$

$I = -2\sqrt{u} + C_2$

Escribiendo la integral con la variable original.

$I = -2\sqrt{1-\sin y} + C_2$

$-2\sqrt{1-\sin y}=\sqrt{2}\cos x+C_1-C_2$

$-2\sqrt{1-\sin y}=\sqrt{2}\cos x+C, C=C_1-C_2$

Así, $-2\sqrt{1-\sin y}=\sqrt{2}\cos x+C$ es solución general de la ED.

Ahora calculamos la solución particular con la condición inicial dada $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Es decir, $x=\frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad y=0$

$-2\sqrt{1-\sin y}=\sqrt{2}\cos x+C$

$-2\sqrt{1-\sin(0)}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+C$

$-2\sqrt{1-0}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+C$

$-2\sqrt{1}=1+C$

$-2\cdot 1-1=C$

$-2-1=C$

$-3=C \qquad \therefore C=-3$

$-2\sqrt{1-\sin y}=\sqrt{2}\cos x-3$

$-2\sqrt{1-\sin y}-\sqrt{2}\cos x=-3$ Colocando $\sqrt{2}\cos x$ del miembro izquierdo con signo contrario.

$-1\left(-2\sqrt{1-\sin y}-\sqrt{2}\cos x=-3\right)$ Multiplicando por -1 ambos miembros de la ecuación.

$2\sqrt{1-\sin y}+\sqrt{2}\cos x=3$ Solución particular implícita.

Calculamos la solución particular explícita.

$-2\sqrt{1-\sin y}=\sqrt{2}\cos x-3$ Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$\left(-2\sqrt{1-\sin y}\right)^2=\left(\sqrt{2}\cos x-3\right)^2$ Cuadrado de un binomio

$(-2)^2\left(\sqrt{1-\sin y}\right)^2=\left(\sqrt{2}\cos x\right)^2-2\left(\sqrt{2}\cos x\right)(3)+(3)^2$ Simplificando.

$4(1-\sin y)=2\cos^2 x-6\sqrt{2}\cos x+9$ Propiedad distributiva.

$4 - 4\sin y = 2\cos^2 x - 6\sqrt{2}\cos x + 9$ Agrupando términos independientes en el miembro derecho de la ecuación.

$-4\sin y = 2\cos^2 x - 6\sqrt{2}\cos x + 9 - 4$ Reduciendo la expresión.

$-4\sin y = 2\cos^2 x - 6\sqrt{2}\cos x + 5$ Multiplicando por -1 ambos miembros de la ecuación.

$-1(-4\sin y = 2\cos^2 x - 6\sqrt{2}\cos x + 5)$

$4\sin y = 6\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 5$ Despejando $\sin y$.

$\sin y = \frac{6\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 5}{4}$ Despejando y.

$\boldsymbol{y = \sin^{-1}\left(\frac{6\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 5}{4}\right)}$ Solución particular explícita.

7. $(1 + e^x)yy' = e^y; \quad y(0) = 0$

Solución:

$(1 + e^x)yy' = e^y$

$(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^y$ Cambiando la notación: $y' = \frac{dy}{dx}$.

$(1 + e^x)ydy = e^y dx$ Multiplicando dx en el miembro derecho.

$\frac{y}{e^y}dy = \frac{1}{1 + e^x}d$ Escribiendo dx y dy en cada miembro con su variable.

$\int \frac{y}{e^y}dy = \int \frac{1}{1 + e^x}dx + C$ Integrando ambos miembros de la ecuación.

Sea: $I = \int \frac{y}{e^y}dy \quad \wedge \quad R = \int \frac{1}{1+e^x}dx$.

$I = R + C$, donde C es la constante de integración.

Calculamos cada integral por separado,

$I = \int \frac{y}{e^y} dy$ resolviendo la integral por parte.

$I = \int ye^{-y} dy$

$I = y(-e^{-y}) - \int (-e^{-y})\, dy$

$I = -ye^{-y} + \int e^{-y} dy$

$I = -ye^{-y} - e^{-y} + C_1$

$R = \int \frac{1}{1+e^x} dx$ resolviendo la integral por sustitución.

$R = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{e^x}$

$R = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{(t-1)}$

$R = \int \frac{1}{t(t-1)} dt$

$R = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}\right) dt$

$R = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right) dt$

$R = -\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t-1} dt$

$R = -\ln|t| + \ln|t-1| + C_2$

$R = \ln|t-1| - \ln|t| + C_2$

$R = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_2$

Escribiendo con la variable original x.

$R = \ln\left|\frac{1+e^x-1}{1+e^x}\right| + C_2$

$R = \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + C_2$

$R = \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + C_2$

$u = y$ $\quad dv = e^{-y} dy$

$\frac{d}{dy} u = \frac{d}{dy} y$ $\quad \int dv = \int e^{-y} dy$

$\frac{du}{dy} = 1$ $\quad v = -e^{-y}$

$du = dy$

Sea:

$t = 1 + e^x \quad \rightarrow \quad e^x = t - 1$

$\frac{d}{dx} t = \frac{d}{dx}(1 + e^x)$

$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(e^x)$

$\frac{dt}{dx} = e^x$

Fracciones parciales.

$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}$

$1 = A(t-1) + Bt$

$1 = At - A + Bt$

$1 = (A+B)t - A$

$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$

$\boldsymbol{A = -1}$ $\quad B = -A$

$B = -(-1)$

$\boldsymbol{B = 1}$

$R = x - \ln|1 + e^{x}| + C_2$

A partir de $I = R + C$, donde C es la constante de integración. Colocamos una sola constante de integración para simplificar el trabajo.

$I = R + C$

$-ye^{-y} - e^{-y} = x - \ln|1 + e^{x}| + C$

$-1[-ye^{-y} - e^{-y} = x - \ln|1 + e^{x}| + C]$

$ye^{-y} + e^{-y} = \ln|1 + e^{x}| - x - C$

Así, $ye^{-y} + e^{-y} = \ln|1 + e^{x}| - x - C$ es solución general de la ED.

Ahora calculamos la solución particular de la ED, con la condición inicial $y(0) = 0$.

Es decir, $x = 0 \quad \wedge \quad y = 0$

$ye^{-y} + e^{-y} = \ln|1 + e^{x}| - x - C$

$(0)e^{-0} + e^{-0} = \ln|1 + e^{0}| - 0 - C$

$1 = \ln|1 + 1| - 0 - C$

$1 = \ln 2 - C$

$-C = 1 - \ln 2$

La solución particular es:

$ye^{-y} + e^{-y} = \ln|1 + e^{x}| - x + 1 - \ln 2$

$\boldsymbol{(y + 1)e^{-y} = \ln\left|\frac{1+e^{x}}{2}\right| - x + 1}$

8. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin\theta + e^{2r}\sin\theta}{e^r\cos\theta + 3e^r}$

Solución:

$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin\theta + e^{2r}\sin\theta}{e^r\cos\theta + 3e^r}$

$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin\theta(1+e^{2r})}{e^r(\cos\theta+3)}$ Factorizando por $\sin\theta$ en el numerador y e^r en el denominador.

$e^r(\cos\theta + 3)dr = \sin\theta\,(1 + e^{2r})d\theta$ Multiplicando en cruz la ecuación.

$\frac{e^r}{1+e^{2r}}dr = \frac{\sin\theta}{\cos\theta+3}d\theta$ Escribiendo dr y $d\theta$ en cada miembro con su variable.

$\int \frac{e^r}{1+e^{2r}}dr = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta+3}d\theta + C$ Integrando ambos miembros de la ecuación.

Sea: $I = \int \frac{e^r}{1+e^{2r}}dr \quad \wedge \quad R = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta+3}d\theta$

$I = R + C$, donde C es la constante de integración.

Calculamos cada integral por separado.

$I = \int \frac{e^r}{1+e^{2r}}dr$ cambio de variable.

$u = e^r$

$\frac{d}{dr}u = \frac{d}{dr}e^r$

$\frac{du}{dr} = e^r$

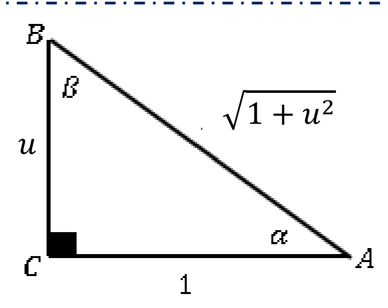
$du = e^r dr$

$I = \int \frac{e^r dr}{1+(e^r)^2}$

$I = \int \frac{du}{1+(u)^2}$

$I = \int \frac{du}{1+u^2}$

Resolviendo por sustitución trigonométrica.



$\tan\alpha = \frac{u}{1}$

$\tan\alpha = u$

$u = \tan\alpha$

$u^2 = \tan^2\alpha$

$\tan\alpha = u \quad \rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}u$

Derivando u.

$\frac{d}{d\alpha}u = \frac{d}{d\alpha}\tan\alpha$

$\frac{du}{d\alpha} = \sec^2\alpha$

$du = \sec^2\alpha\, d\alpha$

$I = \int \frac{\sec^2\alpha\, d\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$I = \int \frac{\sec^2\alpha\, d\alpha}{\sec^2\alpha}$

$I = \int d\alpha$

$I = \alpha + C_1$

$I = \tan^{-1}u + C_1$

Escribiendo con la variable original r.

$I = \tan^{-1} e^r + C_1$

$R = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 3} d\theta$

Resolver por sustitución.

Sea:

$u = \cos\theta + 3$

$\frac{d}{d\theta} u = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta + 3)$ Derivada de u con respecto a θ.

$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta) + \frac{d}{d\theta}(3)$ Derivada de una suma.

$\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta + 0$ Derivada de: $\frac{d}{d\theta}\cos u = -\sin u \frac{d}{d\theta} u \quad \wedge \quad \frac{d}{d\theta} K = 0$.

$\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta$

$du = -\sin\theta \, d\theta$ Despejando du.

$-1(du = -\sin\theta \, d\theta)$ Multiplicando por -1.

$-du = \sin\theta \, d\theta$

Haciendo el cambio de variable en la integral, tenemos:

$R = \int \frac{-du}{u}$

$R = -\int \frac{du}{u}$

$R = -\ln|u| + C_2$

Escribiendo con la variable original θ.

$R = -\ln|\cos\theta + 3| + C_2$

$I = R + C$ sustituyendo I, R, tenemos: $\tan^{-1} e^r = -\ln|\cos\theta + 3| + C$.

$\mathbf{\tan^{-1} e^r + \ln|\cos\theta + 3| = C}$, solución general de la ED.

9. $(e^y+1)^2 e^{-y}dx + (e^x+1)^3 e^{-x}dy = 0$

Solución:

$$(e^y+1)^2 e^{-y}dx + (e^x+1)^3 e^{-x}dy = 0$$

$$(e^x+1)^3 e^{-x}dy = -(e^y+1)^2 e^{-y}dx$$

$$\frac{dy}{(e^y+1)^2 e^{-y}} = -\frac{dx}{(e^x+1)^3 e^{-x}}$$

$$\frac{e^y}{(e^y+1)^2}dy = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx$$

Integrando ambos miembros.

$$\int \frac{e^y}{(e^y+1)^2}dy = \int\left(-\frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx\right) + C$$

$$\int \frac{e^y dy}{(e^y+1)^2} = -\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^3} + C$$

$$\int \frac{du}{(u)^2} = -\int \frac{dv}{(v)^3} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dv}{v^3} + C$$

$$\int u^{-2}du = -\int v^{-3}dv + C$$

$$-u^{-1} = -\left(-\frac{1}{2}v^{-2}\right) + C$$

$$-u^{-1} = \frac{1}{2}v^{-2} + C$$

$$2\left(-u^{-1} = \frac{1}{2}v^{-2} + C\right)$$

$$-2u^{-1} = v^{-2} + 2C$$

$$-2C = 2u^{-1} + v^{-2}$$

$2u^{-1} + v^{-2} = C_1$; $C_1 = -2C$, escribiendo con la variable original x e y.

$\mathbf{2(e^y+1)^{-1} + (e^x+1)^{-2}} = C_1$, solución general de la ED.

Sustituciones

$u = e^y + 1$

$$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}(e^y+1)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}e^y + \frac{d}{dy}1$$

$$\frac{du}{dy} = e^y + 0$$

$$\frac{du}{dy} = e^y$$

$$du = e^y dy$$

$v = e^x + 1$

$$\frac{d}{dx}v = \frac{d}{dx}(e^x+1)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}1$$

$$\frac{dv}{dx} = e^x + 0$$

$$\frac{dv}{dx} = e^x$$

$$dv = e^x dx$$

10. $(xy - 2x + 4y - 8)dx + (y + 3 - xy - 3x)dy = 0$

Solución:

$(xy - 2x + 4y - 8)dx + (y + 3 - xy - 3x)dy = 0$

Factorizando por agrupación de términos.

$[x(y - 2) + 4(y - 2)]dx + [y + 3 - x(y + 3)]dy = 0$

$(y - 2)(x + 4)dx + (y + 3)(1 - x)dy = 0$

$(y - 2)(x + 4)dx = -(y + 3)[-(x - 1)]dy$

$(y - 2)(x + 4)dx = (y + 3)(x - 1)dy$

$(y + 3)(x - 1)dy = (y - 2)(x + 4)dx$

$\frac{y+3}{y-2}dy = \frac{x+4}{x-1}dx$, integrando ambos miembros de la ecuación.

$\int \frac{y+3}{y-2}dy = \int \frac{x+4}{x-1}dx + C$

$\int \frac{y-2+2+3}{y-2}dy = \int \frac{x-1+1+4}{x-1}dx + C$

$\int \frac{y-2+5}{y-2}dy = \int \frac{x-1+5}{x-1}dx + C$

$\int \left(\frac{y-2}{y-2} + \frac{5}{y-2}\right)dy = \int \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{5}{x-1}\right)dx + C$

$\int \left(1 + \frac{5}{y-2}\right)dy = \int \left(1 + \frac{5}{x-1}\right)dx + C$

$\int dy + 5\int \frac{1}{y-2}dy = \int dx + 5\int \frac{1}{x-1}dx + C$

$y + 5\ln(y - 2) = x + 5\ln(x - 1) + C$

$y + \ln(y - 2)^5 = x + \ln(x - 1)^5 + C$

$y - x + \ln(y - 2)^5 - \ln(x - 1)^5 = C$

$$y - x + \ln\left[\frac{(y-2)^5}{(x-1)^5}\right] = C$$

Entonces, $\boldsymbol{y - x + \ln\left[\frac{(y-2)^5}{(x-1)^5}\right] = C}$ es solución general de ED.

11. $(1-y)e^y y' + \frac{y^2}{x\ln x} = 0$

Solución:

$$(1-y)e^y y' + \frac{y^2}{x\ln x} = 0$$

$$(1-y)e^y \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x\ln x} = 0$$

$$-(y-1)e^y \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x\ln x}$$

$$-\left[-(y-1)e^y \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x\ln x}\right]$$

$$(y-1)e^y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x\ln x}$$

$$\frac{(y-1)e^y}{y^2} dy = \frac{1}{x\ln x} dx$$

$$\int \frac{(y-1)e^y}{y^2} dy = \int \frac{1}{x\ln x} dx$$

$$\int \frac{ye^y - e^y}{y^2} dy = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{ye^y}{y^2} - \frac{e^y}{y^2}\right) dy = \int \frac{1}{h} dh$$

$$\int \frac{ye^y}{y^2} dy - \int \frac{e^y}{y^2} dy = \ln h + C_2$$

$$\int \frac{e^y}{y} dy - \int \frac{e^y}{y^2} dy = \ln(\ln x) + C_1$$

$$I - \int \frac{e^y}{y^2} dy = \ln(\ln x) + C_1$$

$$\frac{1}{y} e^y - \int e^y \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy + C_2 - \int \frac{e^y}{y^2} dy = \ln(\ln x) + C_1$$

$$\frac{e^y}{y} + \int \frac{e^y}{y^2} dy + C_2 - \int \frac{e^y}{y^2} dy = \ln(\ln x) + C_1$$

$$\frac{e^y}{y} + C_2 = \ln(\ln x) + C_1$$

Sustitución:

$$h = \ln x$$

$$\frac{d}{dx} h = \frac{1}{dx} \ln x$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dh = \frac{1}{x} dx$$

Integral por parte.

Sea: $I = \int \frac{e^y}{y} dy$

$$u = \frac{1}{y} \qquad dv = e^y dy$$

$$\frac{d}{dy} u = \frac{d}{dy}(y^{-1}) \qquad \int dv = \int e^y\, dy$$

$$v = e^y$$

$$\frac{du}{dy} = -y^{-2}$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}$$

$$du = -\frac{1}{y^2} dy$$

$\frac{e^y}{y} = \ln(\ln x) + C_1 - C_2$

$$\frac{e^y}{y} = \ln(\ln x) + C; \quad C = C_1 - C_2$$

$y\left[\frac{e^y}{y} = \ln(\ln x) + C\right]$

$\boldsymbol{e^y = y\ln(\ln x) + Cy}$, solución general de la ED.

12. $(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - dy - ydy = 0$

Solución:

$$(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - dy - ydy = 0$$

$$(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0$$

Factorizando por dy.

$$(1 + y^2)e^{2x}dx - (1 + y^2)e^y dy - (1 + y)dy = 0$$

Distributiva

$$(1 + y^2)e^{2x}dx - [(1 + y^2)e^y + 1 + y]dy = 0$$

$$(1 + y^2)e^{2x}dx = [(1 + y^2)e^y + 1 + y]dy$$

$$[(1 + y^2)e^y + 1 + y]dy = (1 + y^2)e^{2x}dx$$

Agrupando la variable x con su diferncial y variable "y" con su diferencial.

$$\frac{[(1 + y^2)e^y + 1 + y]}{(1 + y^2)}dy = e^{2x}dx$$

Separando en fracciones homogéneas.

$$\left[\frac{(1 + y^2)e^y}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{y}{1 + y^2}\right]dy = e^{2x}dx$$

Simplificando

$$\left[e^y + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1 + y^2}\right]dy = e^{2x}dx$$

$$\int\left[e^y + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1 + y^2}\right]dy = \int e^{2x}dx + C$$

Integrando ambos miembros de la ecuación.

$$\int e^y\,dy + \int\frac{1}{1 + y^2}dy + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2y}{1 + y^2}dy = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + C$$

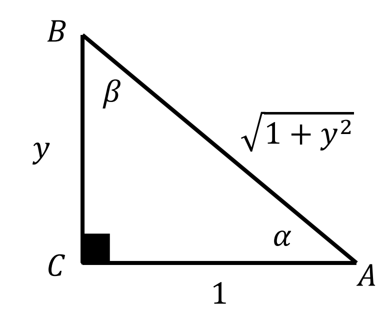
$$e^{y}+\int\frac{1}{1+y^{2}}dy+\frac{1}{2}\ln(1+y^{2})=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

Sea: $I=\int\frac{1}{1+y^{2}}dy$

$e^{y}+I+\frac{1}{2}\ln(1+y^{2})=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ (*)

Resolviendo I por sustitución trigonométrica.

$$I=\int\frac{1}{1+y^{2}}dy$$



$$\tan\alpha=\frac{y}{1}$$

$$\tan\alpha=y$$

$$y=\tan\alpha$$

$$\frac{d}{d\alpha}y=\frac{d}{d\alpha}\tan\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha}=\sec^{2}\alpha$$

$$dy=\sec^{2}\alpha\,d\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y^{2}}}$$

$$(\cos\alpha)^{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^{2}}}\right)^{2}$$

$$\cos^{2}\alpha=\frac{1}{1+y^{2}}$$

$$I=\int\cos^{2}\alpha\sec^{2}\alpha\,d\alpha$$

$$I=\int\frac{1}{\sec^{2}\alpha}\sec^{2}\alpha\,d\alpha$$

$\tan\alpha=y \quad\rightarrow\quad \alpha=\tan^{-1}y$

$$I=\int d\alpha$$

$$I=\alpha+C_{1}$$

$I=\tan^{-1}y+C_{1}$, sustituyendo I en (*).

$$e^{y}+\tan^{-1}y+\frac{1}{2}\ln(1+y^{2})=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$$e^{y}+\tan^{-1}y+\ln(1+y^{2})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$\boldsymbol{e^{y}+\tan^{-1}y+\ln\sqrt{1+y^{2}}=\frac{1}{2}e^{2x}+C}$, solución general de la ED.

13. $y' + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Solución:

$y' + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$y' = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} - \left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\frac{dy}{dx} = -2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$\frac{dy}{2\sin\frac{y}{2}} = -\cos\frac{x}{2}dx$$

$$\frac{1}{2}\csc\frac{y}{2}dy = -\cos\frac{x}{2}dx$$

$\int \frac{1}{2}\csc\frac{y}{2}dy = \int\left(-\cos\frac{x}{2}dx\right) + C$

$\frac{1}{2}\int \csc\frac{y}{2}dy = -\int \cos\frac{x}{2}dx + C$

$\int \csc\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2}dy = -\int \cos\frac{x}{2}dx + C$

$\int \csc u\, du = -\int \cos v \cdot 2dv + C$

$\int \csc u\, du = -2\int \cos v\, dv + C$

$\int \csc u\left(\frac{\csc u - \cot u}{\csc u - \cot u}\right)du = -2\sin v + C$

$\int \frac{\csc^2 u - \csc u\cot u}{\csc u - \cot u}du = -2\sin v + C$

$\int \frac{-\csc u\cot u + \csc^2 u}{\csc u - \cot u}du = -2\sin v + C$

Sustituciones

$u = \frac{y}{2}$	$v = \frac{x}{2}$
$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{2}\right)$	$\frac{d}{dx}v = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$
$\frac{du}{dy} = \frac{1}{2}$	$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}$
$du = \frac{1}{2}dy$	$2dv = dx$

$\ln(\csc u - \cot u) = -2\sin v + C$, escribiendo con la variable original x e y.

$$\ln\left(\csc\frac{y}{2} - \cot\frac{y}{2}\right) = -2\sin\frac{x}{2} + C$$

$\boldsymbol{\ln\left(\csc\frac{y}{2} - \cot\frac{y}{2}\right) + 2\sin\frac{x}{2} = C}$, solución general de la ED.

14. $y\frac{dy}{dx} = e^{x+2y}\sin x$

Solución:

$$y\frac{dy}{dx} = e^{x+2y}\sin x$$

$$y\frac{dy}{dx} = e^{x}e^{2y}\sin x$$

$$\frac{y}{e^{2y}}dy = e^{x}\sin x\,dx$$

$$\int\frac{y}{e^{2y}}dy = \int e^{x}\sin x\,dx$$

$$\int ye^{-2y}dy = \int e^{x}\sin x\,dx$$

Sea: $I = \int ye^{-2y}dy \quad \wedge \quad R = \int e^{x}\sin x\,dx$

$$I = R$$

Integración por partes para y.

$u = y \qquad dv = e^{-2y}dy$

$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}y \qquad \int dv = \int e^{-2y}dy$

$\frac{du}{dy} = 1 \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2y}$

$du = dy$

$$I = y\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)\mathrm{dy}$$

$$I = -\frac{ye^{-2y}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2y}dy$$

$$I = -\frac{ye^{-2y}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2y} + C_1$$

Integración por partes para x.

$u_1 = \sin x \qquad dv_1 = e^{x}dx$

$\frac{d}{dx}u_1 = \frac{d}{dx}\sin x \qquad \int dv_1 = \int e^{x}dx$

$\frac{du_1}{dx} = \cos x \qquad v_1 = e^{x}$

$du_1 = \cos x\,dx$

$$R = e^{x}\sin x - \int e^{x}\cos x\,dx + C_2$$

$-\frac{ye^{-2y}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2y}+C_1=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx+C_2$

Aplicamos integral por parte.

$u_2=\cos x$ $\qquad dv_2=e^x dx$

$\frac{d}{dx}u_2=\frac{d}{dx}\cos x$ $\qquad \int dv_2=\int e^x dx$

$\frac{du_2}{dx}=-\sin x$ $\qquad v_2=e^x$

$du_2=-\sin x\,dx$

$R=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx+C_2$

$R=e^x\sin x-(e^x\cos x-\int e^x(-\sin x\,dx))+C_2$

$R=e^x\sin x-(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx)\ +C_2$

$R=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx+C_2$, se repite la integral $R=\int e^x\sin x\,dx$.

$R=e^x\sin x-e^x\cos x-R+C_2$

$R+R=e^x\sin x-e^x\cos x+C_2$

$2R=e^x\sin x-e^x\cos x+C_2$

$$R=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x+C_2}{2}$$

$$-\frac{ye^{-2y}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2y}+C_1=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x+C_2}{2}$$

$$-4\left(-\frac{ye^{-2y}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2y}+C_1=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x+C_2}{2}\right)$$

$2ye^{-2y}+e^{-2y}-4C_1=-2(e^x\sin x-e^x\cos x+C_2)$

$2ye^{-2y}+e^{-2y}=2e^x(-\sin x+\cos x)-2C_2+4C_1$

$e^{-2y}(2y+1)=2e^x(\cos x-\sin x)+C;\quad C=-2C_2+4C_1$

$$\frac{2y+1}{e^{2y}}=2e^x(\cos x-\sin x)+C$$

$2y + 1 = e^{2y}[2e^{x}(\cos x - \sin x) + C]$

$2y + 1 = 2e^{x}e^{2y}(\cos x - \sin x) + Ce^{2y}$

$\boldsymbol{2y + 1 = 2e^{x+2y}(\cos x - \sin x) + Ce^{2y}}$, solución general de la ED.

15. $y' \sin x = y \ln y \,; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

Solución:

$y' \sin x = y \ln y$

$y' \sin x = y \ln y$

$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y$

$\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{\sin x} dx$

$\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{\sin x} dx + C$

$\int \frac{1}{\ln y} . \frac{1}{y} dy = \int \csc x \, dx + C$

$\int \frac{1}{u} du = \int \csc x \left(\frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}\right) dx + C$

$\ln u = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx + C$

$\ln(\ln y) = \int \frac{-\csc x \cot x + \csc^2 x}{\csc x - \cot x} dx + C$

$\ln(\ln y) = \ln(\csc x - \cot x) + C$

$e^{\ln(\ln y)} = e^{\ln(\csc x - \cot x) + C}$

$\ln y = e^{\ln(\csc x - \cot x)} e^{C}$

$\ln y = (\csc x - \cot x)K; \;\; K = e^{C} \;\; (*)$

Calculamos la solución particular para $x = \frac{\pi}{2}, y = e$.

Sustitución:

$u = \ln y$

$\frac{d}{dy} u = \frac{d}{dy} \ln y$

$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}$

$du = \frac{1}{y} dy$

$\ln e = \left(\csc\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{2}\right)K$

$1 = (1-0)K$

$1 = (1)K$

$1 = K$, sustituyendo K en la ecuación (*).

$\ln y = (\csc x - \cot x)1$

$\ln y = \csc x - \cot x$

$\boldsymbol{y = e^{\csc x - \cot x}}$, solución particular de la ED.

16. $(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0; \quad y(1) = 0$

Solución:

$(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0$

$(1+x^4)dy = -x(1+4y^2)dx$

$\frac{1}{1+4y^2}dy = -\frac{x}{1+x^4}dx$

$\int \frac{1}{1+4y^2}dy = \int \left(-\frac{x}{1+x^4}dx\right) + C$

$\int \frac{1}{1+4y^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^4}dx + C$

$\int \frac{dy}{1+(2y)^2} = -\int \frac{xdx}{1+(x^2)^2} + C$

$\int \frac{\frac{dh}{2}}{1+(h)^2} = -\int \frac{\frac{dr}{2}}{1+(r)^2} + C$

$\frac{1}{2}\int \frac{dh}{1+h^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dr}{1+r^2} + C$

$\int \frac{dh}{1+h^2} = -\int \frac{dr}{1+r^2} + C$

Sustituciones

$h = 2y$	$r = x^2$
$\frac{d}{dy}h = \frac{d}{dy}(2y)$	$\frac{d}{dx}r = \frac{d}{dx}x^2$
$\frac{dh}{dy} = 2$	$\frac{dr}{dx} = 2x$
$\frac{dh}{2} = dy$	$\frac{dr}{2} = xdx$

Se ha demostrado en problemas anteriores que la integral de la forma:

$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$.

$\tan^{-1} h = -\tan^{-1} r + C$, escribiendo con la variable original, se obtiene:

$\tan^{-1} 2y = -\tan^{-1} x^2 + C$, solución general de la ED.

Calculemos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = 0$.

$$\tan^{-1} 2 \cdot 0 = -\tan^{-1} 1^2 + C$$

$$\tan^{-1} 0 = -\tan^{-1} 1 + C$$

$$0 = -\frac{\pi}{4} + C$$

$$\frac{\pi}{4} = C \quad \rightarrow \quad C = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1} 2y = -\tan^{-1} x^2 + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1} 2y = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x^2$$

$$\tan^{-1} \omega = u \quad \rightarrow \quad \omega = \tan u$$

$$2y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x^2\right)$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan(\tan^{-1} x^2)}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan(\tan^{-1} x^2)}\right]$$

$$\tan(\tan^{-1} u) = u$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - x^2}{1 + 1 \cdot x^2}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right]$$

Entonces, $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]}$ es solución particular de la ED.

17. $y' + 6y\tan 2x = 0; \quad y(0) = -2$

Solución:

$y' + 6y\tan 2x = 0$

$\frac{dy}{dx} + 6y\tan 2x = 0$

$\frac{dy}{dx} = -6y\tan 2x$

$\frac{1}{y}dy = -6\tan 2x\, dx$

$\int \frac{1}{y}dy = \int(-6\tan 2x\, dx)$

$\ln y = -6\int \tan 2x\, dx$

$\ln y = -6\int \tan u \cdot \frac{du}{2}$

$\ln y = -6 \cdot \frac{1}{2}\int \tan u\, du$

$\ln y = -3\int \frac{\sin u}{\cos u}du$

$\ln y = -3\int \frac{\sin u du}{\cos u}$

$\ln y = -3\int \frac{-dh}{h}$

$\ln y = 3\int \frac{dh}{h}$

$\ln y = 3\ln h + C$

Escribiendo con la variable original x.

$\ln y = 3\ln(\cos u) + C$

$\ln y = 3\ln(\cos 2x) + C$

$\ln y = \ln(\cos 2x)^3 + C$

$\ln y - \ln(\cos 2x)^3 = C$

Sustitución.

$u = 2x$

$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(2x)$

$\frac{du}{dx} = 2$

$du = 2dx$

$\frac{du}{2} = dx$

Sustitución.

$h = \cos u$

$\frac{d}{du}h = \frac{d}{du}(\cos u)$

$\frac{dh}{du} = -\sin u$

$dh = -\sin u\, du$

$-dh = \sin u\, du$

$$\ln\left[\frac{y}{(\cos 2x)^3}\right] = C$$

$$\frac{y}{(\cos 2x)^3} = e^C$$

$$\frac{y}{(\cos 2x)^3} = K; \quad K = e^C$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = -2$.

$$\frac{-2}{(\cos 2 \cdot 0)^3} = K$$

$$\frac{-2}{(\cos 0)^3} = K$$

$$\frac{-2}{(1)^3} = K$$

$$\frac{-2}{1} = K$$

$$-2 = K \quad \rightarrow \quad K = -2$$

$$\frac{y}{(\cos 2x)^3} = -2$$

$$y = -2(\cos 2x)^3$$

$$y = -2\cos^3 2x$$

Entonces, $\boldsymbol{y = -2\cos^3 2x}$ es solución particular de la ED.

18. $ydy = 4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}}dx; \quad y(0) = 1$

Solución:

$$ydy = 4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\frac{y}{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}}dy = 4xdx$$

$$\int \frac{ydy}{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}} = 4\int xdx + C$$

$$\int \frac{\frac{du}{2}}{(u+1)^{\frac{1}{2}}} = 2x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{(u)^{\frac{1}{2}}} = 2x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} = 2x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^2 + C$$

$$u^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + C$$

Sustitución.

$$u = y^2 + 1$$

$$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}(y^2+1)$$

$$\frac{du}{dy} = 2y$$

$$du = 2ydy$$

$$\frac{du}{2} = ydy$$

Escribiendo con la variable original y.

$(y^2+1)^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 1$.

$$(1^2+1)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot 0^2 + C$$

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot 0 + C$$

$(2)^{\frac{1}{2}} = 0 + C$

$\sqrt{2} = C \quad \rightarrow \quad C = \sqrt{2}$

$(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + \sqrt{2}$

$\sqrt{y^2 + 1} = 2x^2 + \sqrt{2}$

Entonces, $\boldsymbol{\sqrt{y^2 + 1} = 2x^2 + \sqrt{2}}$ es solución particular de la ED.

19. $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$

Solución:

$(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$, factorizando por agrupación de términos la ED.

$[y^2(x - 1) + (x - 1)]dx + [x^2y + x^2 - 2xy + 2y - 2x + 2]dy = 0$

$[(x - 1)(y^2 + 1)]dx + [x^2(y + 1) - 2y(x - 1) - 2(x - 1)]dy = 0$

$(x - 1)(y^2 + 1)dx + [x^2(y + 1) - 2(x - 1)(y + 1)]dy = 0$

$(x - 1)(y^2 + 1)dx + \big[(y + 1)\big(x^2 - 2(x - 1)\big)\big]dy = 0$

$(x - 1)(y^2 + 1)dx + [(y + 1)(x^2 - 2x + 2)]dy = 0$

$(x - 1)(y^2 + 1)dx + (y + 1)(x^2 - 2x + 2)dy = 0$

$\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}dx + \frac{y + 1}{y^2 + 1}dy = 0$

$\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}dx + \int \frac{y + 1}{y^2 + 1}dy = C$ Integrando ambos miembros de la ecuación.

$\frac{1}{2}\int \frac{2(x - 1)}{x^2 - 2x + 2}dx + \int \frac{y}{y^2 + 1}dy + \int \frac{1}{y^2 + 1}dy = C$

$\frac{1}{2}\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2 + 1}dy + \int \frac{1}{1 + y^2}dy = C$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+\tan^{-1}y=C$$

$$2\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+\tan^{-1}y=C\right]$$

$$\ln(x^2-2x+2)+\ln(y^2+1)+2\tan^{-1}y=2C$$

$$\ln[(x^2-2x+2)(y^2+1)]+2\tan^{-1}y=2C$$

$$e^{\ln[(x^2-2x+2)(y^2+1)]+2\tan^{-1}y}=e^{2C}$$

$$e^{\ln[(x^2-2x+2)(y^2+1)]}e^{2\tan^{-1}y}=K;\quad K=2C$$

$$(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\tan^{-1}y}=K$$

Entonces, $\boldsymbol{(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\tan^{-1}y}=K}$ es solución general de la ED.

20. $(1+y^2)dx=\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy$

Solución:

$$(1+y^2)dx=\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{y-\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}dy$$

$$\frac{y-\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}dy=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\left(\frac{y}{1+y^2}-\frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}\right)dy=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}-\frac{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}{1+y^2}\right)dy=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}-\frac{1}{(1+y^2)(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}}\right)dy=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}-\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dy=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy=\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx+C$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+y^2}dy-\int\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy=\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx+C$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\int\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy=\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx+C$$

Sea: $I=\int\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy \quad \wedge \quad R=\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$, entones:

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-I=R+C$$

Calculamos cada integral por separado.

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy$$

$$I=\int\sin\alpha\,(-\csc^2\alpha\,d\alpha)$$

$$I=-\int\sin\alpha\csc^2\alpha\,d\alpha$$

$$I=-\int\frac{1}{\csc\alpha}\cdot\csc^2\alpha\,d\alpha$$

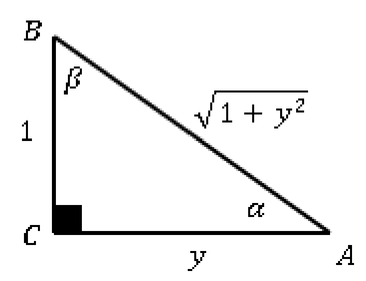
$$I=-\int\csc\alpha\,d\alpha$$

$$I=-\int\csc\alpha\left(\frac{\csc\alpha-\cot\alpha}{\csc\alpha-\cot\alpha}\right)d\alpha$$

$$I=-\int\frac{\csc^2\alpha-\csc\alpha\cot\alpha}{\csc\alpha-\cot\alpha}d\alpha$$

$$I=-\int\frac{-\csc\alpha\cot\alpha+\csc^2\alpha}{\csc\alpha-\cot\alpha}d\alpha$$

Sustitución trigonométrica.



$$\cot\alpha=\frac{y}{1}$$

$$\cot\alpha=y$$

$$y=\cot\alpha$$

$$\frac{d}{d\alpha}y=\frac{d}{d\alpha}\cot\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha}=-\csc^2\alpha$$

$$dy=-\csc^2\alpha\,d\alpha$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\csc\alpha=\sqrt{1+y^2}$$

$I=-\ln(\csc\alpha-\cot\alpha)+C_1$, escribiendo con la variable original y.

$$I = -\ln\left(\sqrt{1+y^2} - y\right) + C_1$$

Calculamos la segunda integral.

$$R = \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$R = \int \frac{1}{(1+\cot^2\theta)^{\frac{3}{2}}}(-\csc^2\theta\, d\theta)$$

$$R = -\int \frac{1}{(\csc^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\csc^2\theta\, d\theta$$

$$R = -\int \frac{1}{[(\csc\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}(\csc\theta)^2 d\theta$$

$$R = -\int \frac{1}{(\csc\theta)^3}(\csc\theta)^2\, d\theta$$

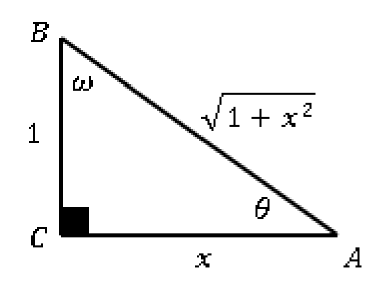
$$R = -\int \frac{1}{\csc\theta}\,d\theta$$

$$R = -\int \sin\theta\, d\theta$$

$$R = -(-\cos\theta) + C_2$$

$$R = \cos\theta + C_2$$

Sustitución trigonométrica.



$$\cot\theta = \frac{x}{1} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cot\theta = x$$

$$x = \cot\theta \quad \rightarrow \quad x^2 = \cot^2\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}x = \frac{d}{d\theta}\cot\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\csc^2\theta$$

$$dx = -\csc^2\theta\, d\theta$$

Escribiendo con la variable original x.

$$R = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_2$$

Sustituyendo I y R en $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) - I = R + C$.

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) - \left(-\ln\left(\sqrt{1+y^2} - y\right) + C_1\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_2 + C$$

$$\ln(1+y^2)^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\sqrt{1+y^2} - y\right) - C_1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_2 + C$$

$$\ln\sqrt{1+y^2} + \ln\left(\sqrt{1+y^2} - y\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_2 - C_1 + C$$

$$\mathbf{ln}\left[\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}\left(\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}} - \boldsymbol{y}\right)\right] = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}} + \boldsymbol{K}; \quad K = C_2 - C_1 + C$$

3.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas

3.4.1 Función homogénea

Se dice que $f(x,y)$ es una función homogénea de grado n, si para algún número real t:

$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

• Determinar cuáles de las siguientes funciones son homogéneas, si lo es, indicar su grado.

1. $f(x,y) = \frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$

Solución:

$f(x,y) = \frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$

$f(tx,ty) = \frac{tx}{(ty)^2+\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}}$ Definición 11.

$f(tx,ty) = \frac{tx}{t^2y^2+\sqrt{t^4x^4+t^4y^4}}$ Potencia de un producto.

$f(tx,ty) = \frac{tx}{t^2y^2+\sqrt{t^4(x^4+y^2)}}$ Factorizando en la raíz cuadrada por t^4.

$f(tx,ty) = \frac{tx}{t^2y^2+t^2\sqrt{x^4+y^4}}$ Raíz de un producto.

$f(tx,ty) = \frac{tx}{t^2\left(y^2+\sqrt{x^4+y^4}\right)}$ Factorizando por t^2en el denominador.

$f(tx,ty) = \frac{x}{t\left(y^2+\sqrt{x^4+y^4}\right)}$ Simplificando.

$f(tx,ty) = t^{-1}\left(\frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}\right)$ Exponente negativo.

$f(tx,ty) = t^{-1}f(x,y)$ Definición 11.

Por lo tanto, $f(x,y) = \frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$ es una función homogénea de grado -1.

2. $f(x,y) = \cos\frac{x^2}{x+y}$

Solución:

$f(x,y) = \cos\frac{x^2}{x+y}$

$f(tx,ty) = \cos\frac{(tx)^2}{tx+ty}$ Definición 11.

$f(tx,ty) = \cos\frac{t^2x^2}{tx+ty}$ Potencia de un producto.

$f(tx,ty) = \cos\frac{t^2x^2}{t(x+y)}$ Factorizando por t en el denominador.

$f(tx,ty) = \cos\frac{tx}{x+y}$ Simplificando.

Como $f(tx,ty) \neq tf(x,y)$, se concluye que $f(x,y) = \cos\frac{x^2}{x+y}$ no es función homogénea.

3. $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$

Solución:

$f(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$

$f(tx,ty) = ((tx)^2 + (ty)^2)^{\frac{3}{2}}$ Definición 11.

$f(tx,ty) = (t^2x^2 + t^2y^2)^{\frac{3}{2}}$ Potencia de un producto.

$f(tx,ty) = [t^2(x^2 + y^2)]^{\frac{3}{2}}$ Factorizando por t^2.

$f(tx,ty) = (t^2)^{\frac{3}{2}}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ Potencia de un producto.

$f(tx,ty) = t^3(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ Simplificando.

$f(tx,ty) = t^3 f(x,y)$ Definición 11.

Por lo tanto, $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ es una función homogénea de grado 3.

4. $f(x,y) = (4x + 3y)\sqrt{x + y}$

Solución:

$f(x,y) = (4x + 3y)\sqrt{x + y}$

$f(tx,ty) = (4tx + 3ty)\sqrt{tx + ty}$ Definición 11.

$f(tx,ty) = t(4x + 3y)\sqrt{t(x + y)}$ Factorizando por t.

$f(tx,ty) = t(4x + 3y)\sqrt{t} \cdot \sqrt{x + y}$ Raíz de un producto.

$f(tx,ty) = t\sqrt{t}(4x + 3y)\sqrt{x + y}$

$f(tx,ty) = tt^{\frac{1}{2}}(4x + 3y)\sqrt{x + y}$ Exponente fraccionario.

$f(tx,ty) = t^{\frac{3}{2}}(4x + 3y)\sqrt{x + y}$ M.P de igual base.

$f(tx,ty) = t^{\frac{3}{2}}f(x,y)$ Definición 11.

Por lo tanto, $f(x,y) = (4x + 3y)\sqrt{x + y}$ es una función homogénea de grado $\frac{3}{2}$.

5. $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

Solución:

$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)(ty)}$ Definición 11.

$f(tx,ty) = \frac{t^2x^2 - t^2y^2}{t^2xy}$ Potencia de un producto.
M.P de igual base.

$f(tx,ty) = \frac{t^2(x^2 - y^2)}{t^2xy}$ Factorizando por t^2en el numerador.

$f(tx,ty) = t^2t^{-2}\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)$ Exponente negativo.

$f(tx,ty) = t^0\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)$ M.P de igual base.

$f(tx,ty) = t^0f(x,y)$ Definición 11.

Por lo tanto, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$,es una función homogénea de grado 0.

6. $f(x,y) = x\sin\frac{y}{x} - y\sin\frac{x}{y}$

Solución:

$f(x,y) = x\sin\frac{y}{x} - y\sin\frac{x}{y}$

$f(tx,ty) = tx\sin\frac{ty}{tx} - ty\sin\frac{tx}{ty}$ Definición 11.

$f(tx,ty) = tx\sin\frac{y}{x} - ty\sin\frac{x}{y}$ Simplificando.

$f(tx,ty) = t\left(x\sin\frac{y}{x} - y\sin\frac{x}{y}\right)$ Factorizando por t.

$f(tx,ty) = tf(x,y)$ Definición 11.

Por lo tanto, $f(x,y) = x\sin\frac{y}{x} - y\sin\frac{x}{y}$, es una función homogénea de grado 1.

7. $f(x,y) = x\ln x - y\ln y$

Solución:

$f(x,y) = x\ln x - y\ln y$

$f(tx,ty) = tx\ln tx - ty\ln ty$

$f(tx,ty) = t(x\ln tx - y\ln ty)$

Como $f(tx, ty) \neq tf(x, y)$, concluye que $f(x, y) = x \ln x - y \ln y$ no es función homogénea.

8. $f(x, y) = \ln x^2 - 2 \ln y$

Solución:

$f(x, y) = \ln x^2 - 2 \ln y$

$f(x, y) = \ln x^2 - \ln y^2$ $\qquad \ln u^n = n \ln u$

$f(x, y) = \ln \frac{x^2}{y^2}$ $\qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$f(tx, ty) = \ln \frac{(tx)^2}{(ty)^2}$

$f(tx, ty) = \ln \frac{t^2 x^2}{t^2 y^2}$

$f(tx, ty) = \ln \frac{x^2}{y^2}, \quad t \neq 0$

$f(tx, ty) = t^0 \ln \frac{x^2}{y^2}$

$f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$

Por lo tanto, $f(x, y) = \ln x^2 - 2 \ln y$ es función homogénea de grado 0.

9. $f(x, y) = (x^{-1} + y^{-1})^2$

Solución:

$f(x, y) = (x^{-1} + y^{-1})^2$

$f(tx, ty) = [(tx)^{-1} + (ty)^{-1}]^2$

$f(tx, ty) = [t^{-1} x^{-1} + t^{-1} y^{-1}]^2$

$f(tx, ty) = [t^{-1}(x^{-1} + y^{-1})]^2$

$f(tx, ty) = (t^{-1})^2(x^{-1} + y^{-1})^2$

$f(tx, ty) = t^{-2}(x^{-1} + y^{-1})^2$

$f(x, y) = t^{-2}f(x, y)$

Por lo tanto, $f(x, y) = (x^{-1} + y^{-1})^2$ es homogénea de grado -2.

10. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\frac{2x}{y}} + 4xy$

Solución:

$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\frac{2x}{y}} + 4xy$

$f(tx, ty) = ((tx)^2 + (tx)^2)e^{\frac{2tx}{ty}} + 4tx \cdot ty$

$f(tx, ty) = (t^2x^2 + t^2y^2)e^{\frac{2x}{y}} + 4t^2xy$

$f(tx, ty) = t^2(x^2 + y^2)e^{\frac{2x}{y}} + 4t^2xy$

$f(tx, ty) = t^2\left[(x^2 + y^2)e^{\frac{2x}{y}} + 4xy\right]$

$f(tx, ty) = t^2f(x, y)$

Por lo tanto, $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\frac{2x}{y}} + 4xy$ es función homogénea de grado 2.

3.4.2 Soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas

• Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Compruebe la homogeneidad, además, determine la solución particular, donde se den las condiciones iniciales.

1. $(x^2 + xy + 3y^2)dx - (x^2 + 2xy)dy = 0$

Solución:

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x, y) = x^2 + xy + 3y^2$ $\quad$ $N(x, y) = -(x^2 + 2xy)$

$M(tx, ty) = (tx)^2 + txty + 3(ty)^2$ $\quad$ $N(tx, ty) = -((tx)^2 + 2txty)$

$M(tx, ty) = t^2x^2 + t^2xy + 3x^2y^2$ $\quad$ $N(tx, ty) = -(t^2x^2 + 2t^2xy)$

$M(tx, ty) = t^2(x^2 + xy + 3y^2)$ $\quad$ $N(tx, ty) = -t^2(x^2 + 2xy)$

$M(tx, ty) = t^2M(x, y)$ $\quad$ $N(tx, ty) = t^2[-(x^2 + 2xy)]$

$\boldsymbol{M(tx, ty) = t^2M(x, y)}$ $\quad$ $\boldsymbol{N(tx, ty) = t^2N(x, y)}$

Así, las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado 2.

Para considerar el cambio de variable, debemos observar la estructura más simple, luego aplicar el teorema 1; como se menciona en capítulo anterior en la sección de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas.

Como $N(x, y)$ es de estructura más simple que $M(x, y)$, usamos el siguiente cambio de variable:

$y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv$ en la ED.

$(x^2 + xxv + 3(xv)^2)dx - (x^2 + 2xxv)(vdx + xdv) = 0$

$(x^2 + x^2v + 3x^2v^2)dx - (x^2 + 2x^2v)(vdx + xdv) = 0$

$x^2(1 + v + 3v^2)dx - x^2(1 + 2v)(vdx + xdv) = 0$

$\frac{1}{x^2}[x^2(1 + v + 3v^2)dx - x^2(1 + 2v)(vdx + xdv)] = \frac{1}{x^2} \cdot 0 \ ; x^2 \neq 0$

$\frac{x^2(1+v+3v^2)dx}{x^2} - \frac{x^2(1+2v)(vdx+xdv)}{x^2} = 0$

$(1 + v + 3v^2)dx - (1 + 2v)(vdx + xdv) = 0$

$(1 + v + 3v^2)dx - v(1 + 2v)dx - x(1 + 2v)dv = 0$

$[1 + v + 3v^2 - v(1 + 2v)]dx - x(1 + 2v)dv = 0$

$[1 + v + 3v^2 - v - 2v^2]dx - x(1 + 2v)dv = 0$

$(1 + v^2)dx - x(1 + 2v)dv = 0$

$\frac{dx}{x} - \frac{1+2v}{1+v^2}dv = 0$

$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1+2v}{1+v^2}dv = C$, donde C es la constante de integración. Colocamos una sola constante de integral para simplificar el trabajo.

$\ln x - \int \frac{1+2v}{1+v^2}dv = C$

Sea: $I = -\int \frac{1+2v}{1+v^2}dv$

$\ln x + I = C$

$I = -\int \frac{1+2v}{1+v^2}dv$

$I = -\int \frac{1+2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \cdot \text{Sec}^2\,\alpha\, d\alpha$

$I = -\int \frac{1+2\tan\alpha}{\text{Sec}^2\,\alpha} \cdot \text{Sec}^2\,\alpha\, d\alpha$

$I = -\int (1 + 2\tan\alpha)d\alpha$

$I = -\int d\alpha - 2\int \tan\alpha\, d\alpha$

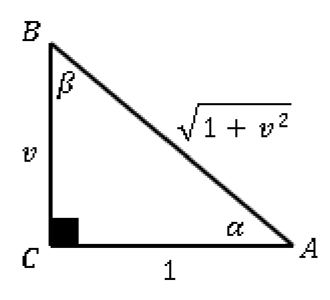
$I = -\alpha - 2\int \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, d\alpha$

$I = -\alpha + 2\ln(\cos\alpha) + C_1$

Escribiendo con la variable original.

$I = -\tan^{-1} v + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right) + C_1$

Sustitución trigonométrica.



$\tan\alpha = v \quad \rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1} v$

$v = \tan\alpha \quad \rightarrow \quad v^2 = \tan^2\alpha$

$\frac{d}{d\alpha}v = \frac{d}{d\alpha}(\tan\alpha)$

$\frac{dv}{d\alpha} = \text{Sec}^2\,\alpha$

$dv = \text{Sec}^2\,\alpha\, d\alpha$

Sustituyendo I en $\ln x + I = C$, se obtiene:

$$\ln x - \tan^{-1} v + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right) = C$$

$$\ln x - \tan^{-1} v + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right)^2 = C$$

$$\ln x - \tan^{-1} v + \ln\frac{1}{1+v^2} = C$$

$$\ln\left[x\left(\frac{1}{1+v^2}\right)\right] - \tan^{-1} v = C$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln\left[x\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)\right] - \tan^{-1}\frac{y}{x} = C$$

$$\ln\left[x\left(\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\right)\right] - \tan^{-1}\frac{y}{x} = C$$

$$\ln\left(x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) - \tan^{-1}\frac{y}{x} = C$$

$$\ln\frac{x^3}{x^2+y^2} - \tan^{-1}\frac{y}{x} = C$$

Entonces, $\mathbf{\ln\frac{x^3}{x^2+y^2} - \tan^{-1}\frac{y}{x} = C}$ es solución general de la ED.

2. $ydx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)dy$

Solución:

Expresemos la ED de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$$ydx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)dy$$

$$ydx - \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)dy = 0$$

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y) = y$ $\quad\quad$ $N(x,y) = -\left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)$

$M(tx,ty) = ty$ $\quad\quad$ $N(tx,ty) = -\left(tx + \sqrt{(ty)^2 - (tx)^2}\right)$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = tM(x,y)}$ $\quad\quad$ $N(tx,ty) = -\left(tx + \sqrt{t^2y^2 - t^2x^2}\right)$

$N(tx,ty) = -\left(tx + \sqrt{t^2(y^2 - x^2)}\right)$

$N(tx,ty) = -\left(tx + t\sqrt{y^2 - x^2}\right)$

$N(tx,ty) = -t\left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)$

$N(tx,ty) = t\left[-\left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)\right]$

$\boldsymbol{N(tx,ty) = t\,N(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Para considerar el cambio de variable, debemos observar la estructura más simple, luego aplicamos el teorema 1. Como $M(x,y)$ es de estructura más simple que $N(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable: $x = yv \quad \rightarrow \quad dx = vdy + ydv$.

$y(vdy + ydv) - \left(yv + \sqrt{y^2 - (yv)^2}\right)dy = 0$

$y(vdy + ydv) - \left(yv + \sqrt{y^2 - y^2v^2}\right)dy = 0$ $\quad\quad$ Potencia de un producto.

$y(vdy + ydv) - \left(yv + \sqrt{y^2(1 - v^2)}\right)dy = 0$ $\quad\quad$ Factorizando la cantidad subradical por y^2.

$y(vdy + ydv) - \left(yv + y\sqrt{1 - v^2}\right)dy = 0$

$y(vdy + ydv) - y\left(v + \sqrt{1 - v^2}\right)dy = 0$

$\frac{1}{y}\left[y(vdy + ydv) - y\left(v + \sqrt{1 - v^2}\right)dy\right] = \frac{1}{y} \cdot 0\,; y \neq 0$ $\quad\quad$ Multiplicando por $\frac{1}{y}$.

$\frac{y(vdy+ydv)}{y} - \frac{y\left(v+\sqrt{1-v^2}\right)dy}{y} = 0$ $\quad\quad$ Simplificando.

$vdy + ydv - \left(v + \sqrt{1 - v^2}\right)dy = 0$

$vdy + ydv - vdy - \sqrt{1 - v^2}dy = 0$

$ydv - \sqrt{1 - v^2}dy = 0$

$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{dy}{y} = 0$

$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} - \int \frac{dy}{y} = C$; donde C es la constante de integración. Colocamos una sola constante de integración para simplificar el trabajo.

$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} - \ln y = C$

Sea: $I = \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$

$I - \ln y = C$

$$I = \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$I = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$$

$$I = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}$$

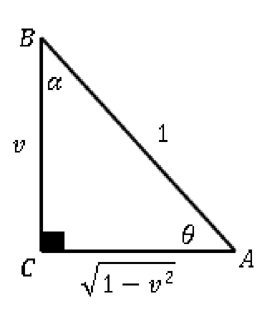
$$I = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\cos\theta}$$

$I = \int d\theta$

$I = \theta$

$I = \sin^{-1} v + C_1$

Sustitución trigonométrica.



$\sin\theta = v \quad \rightarrow \quad \theta = \sin^{-1} v$

$v = \sin\theta \quad \rightarrow \quad v^2 = \sin^2\theta$

$\frac{d}{d\theta} v = \frac{d}{d\theta}(\sin\theta)$

$\frac{dv}{d\theta} = \cos\theta$

$dv = \cos\theta \, d\theta$

Sustituyendo I en $I - \ln y = C$, se obtiene:

$\sin^{-1} v - \ln y = C$

$\sin^{-1} v = \ln y + C$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$\sin^{-1}\dfrac{x}{y} = \ln y + C$

Así, $\mathbf{\sin^{-1}\frac{x}{y} = \ln y + C}$ es solución general de la ED.

3. $\left[\sqrt{x^2 - y^2} - y\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx + \left[x\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy = 0$

Solución:

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} - y\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\qquad N(x,y) = x\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$M(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} - ty\sin^{-1}\left(\frac{ty}{tx}\right)$ $\qquad N(tx,ty) = tx\sin^{-1}\left(\frac{ty}{tx}\right)$

$M(tx,ty) = \sqrt{t^2x^2 - t^2y^2} - ty\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\qquad \boldsymbol{N(tx,ty) = tN(x,y)}$

$M(tx,ty) = \sqrt{t^2(x^2 - y^2)} - ty\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$M(tx,ty) = t\sqrt{x^2 - y^2} - ty\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$M(tx,ty) = t\left[\sqrt{x^2 - y^2} - y\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = tM(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $N(x,y)$ es de estructura más simple que $M(x,y)$, aplicando el teorema 1; cambio de variable: $y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv$.

$\left[\sqrt{x^2 - (xv)^2} - xv\sin^{-1}\left(\frac{xv}{x}\right)\right]dx + \left[x\sin^{-1}\left(\frac{xv}{x}\right)\right](vdx + xdv) = 0$

$\left[\sqrt{x^2 - x^2v^2} - xv\sin^{-1}(v)\right]dx + [x\sin^{-1}(v)](vdx + xdv) = 0$

$\left[\sqrt{x^2(1 - v^2)} - xv\sin^{-1}(v)\right]dx + [x\sin^{-1}(v)](vdx + xdv) = 0$

$\left[x\sqrt{1-v^2} - xv\sin^{-1}(v)\right]dx + [x\sin^{-1}(v)](vdx + xdv) = 0$

$x\left[\sqrt{1-v^2} - v\sin^{-1}(v)\right]dx + x[\sin^{-1}(v)](vdx + xdv) = 0$

$\frac{1}{x}\left\{x\left[\sqrt{1-v^2} - v\sin^{-1}(v)\right]dx + x[\sin^{-1}(v)](vdx + xdv)\right\} = \frac{1}{x}\cdot 0\ ; x \neq 0$

$\frac{x\left[\sqrt{1-v^2} - v\sin^{-1}(v)\right]dx}{x} + \frac{x\left[\sin^{-1}(v)\right](vdx+xdv)}{x} = 0$

$\left[\sqrt{1-v^2} - v\sin^{-1}(v)\right]dx + [\sin^{-1}(v)](vdx + xdv) = 0$

$\sqrt{1-v^2}dx - v\sin^{-1}(v)dx + v\sin^{-1}(v)\,dx + x\sin^{-1}(v)\,dv = 0$

$\sqrt{1-v^2}dx + x\sin^{-1}(v)\,dv = 0$

$\frac{dx}{x} + \frac{\sin^{-1}(v)}{\sqrt{1-v^2}}dv = 0$

$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{\sin^{-1}(v)}{\sqrt{1-v^2}}dv = C$; donde C es la constante de integración. Colocamos una sola constante de integración para simplificar el trabajo.

$\ln x + \int\frac{\sin^{-1}(v)}{\sqrt{1-v^2}}dv = C$

Sea: $I = \int\frac{\sin^{-1}(v)}{\sqrt{1-v^2}}dv$

$\ln x + I = C$

$I = \int\frac{\sin^{-1}(v)}{\sqrt{1-v^2}}dv$	$u = \sin^{-1}(v)$
Resolviendo por sustitución.	$\frac{d}{dv}u = \frac{d}{dv}[\sin^{-1}(v)]$
$I = \int\sin^{-1}(v)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv$	$\frac{du}{dv} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$
$I = \int u\,du$	$du = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv$
$I = \frac{1}{2}u^2$	
Escribiendo con la variable original.	
$I = \frac{1}{2}[\sin^{-1}(v)]^2 + C_1$	

$\ln x + \frac{1}{2}[\sin^{-1}(v)]^2 = C$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$\ln x + \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]^2 = C$

Luego, $\mathbf{\ln x + \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]^2 = C}$ es solución general de la ED.

4. $\left[x + (x - y)e^{\frac{y}{x}}\right]dx + xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$

Solución:

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x, y) = x + (x - y)e^{\frac{y}{x}}$ $N(x, y) = xe^{\frac{y}{x}}$

$M(tx, ty) = tx + (tx - ty)e^{\frac{ty}{tx}}$ $N(tx, ty) = txe^{\frac{ty}{ty}}$

$M(tx, ty) = tx + t(x - y)e^{\frac{y}{x}}$ $N(tx, ty) = txe^{\frac{y}{x}}$

$M(tx, ty) = t\left[x + (x - y)e^{\frac{y}{x}}\right]$ $\boldsymbol{N(tx, ty) = tN(x, y)}$

$\boldsymbol{M(tx, ty) = tM(x, y)}$

Así, las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $N(x, y)$ es de estructura más simple que $M(x, y)$, usamos el siguiente cambio de variable:

$y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv.$

$\left[x + (x - xv)e^{\frac{xv}{x}}\right]dx + xe^{\frac{xv}{x}}(vdx + xdv) = 0$

$[x + x(1 - v)e^{v}]dx + xe^{v}(vdx + xdv) = 0$

$x[1 + (1 - v)e^{v}]dx + xe^{v}(vdx + xdv) = 0$ Factorizando x en el primer término.

$\frac{1}{x}\{x[1+(1-v)e^v]dx+xe^v(vdx+xdv)\}=\frac{1}{x}\cdot 0\ ;x\neq 0$ Multiplicando por $\frac{1}{x}$.

$\frac{x[1+(1-v)e^v]dx}{x}+\frac{xe^v(vdx+xdv)}{x}=0$ Simplificando.

$[1+(1-v)e^v]dx+e^v(vdx+xdv)=0$

$[1+e^v-ve^v]dx+ve^vdx+xe^vdv=0$

$[1+e^v-ve^v+ve^v]dx+xe^vdv=0$

$[1+e^v]dx+xe^vdv=0$

$$\frac{dx}{x}+\frac{e^v}{1+e^v}dv=0$$

$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{e^v}{1+e^v}dv=C$; donde C es la constante de integración.

$\ln x+\ln(1+e^v)=C$

$\ln[x(1+e^v)]=C$

$e^{\ln[x(1+e^v)]}=e^C$

$x(1+e^v)=K\quad ;K=e^C$

Sustituyendo $v=\frac{y}{x}$ en la ecuación.

$x\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)=K$

Luego, $\boldsymbol{x\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)=K}$ es solución general de la ED.

5. $ydx + \left(y\cos\frac{x}{y} - x\right)dy = 0$; $y(0) = 2$

Solución:

Comprobamos si la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y) = y$

$M(tx,ty) = ty$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = tM(x,y)}$

$N(x,y) = y\cos\frac{x}{y} - x$

$N(tx,ty) = ty\cos\frac{tx}{ty} - tx$

$N(tx,ty) = ty\cos\frac{x}{y} - tx$

$N(tx,ty) = t\left(y\cos\frac{x}{y} - x\right)$

$\boldsymbol{N(tx,ty) = tN(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $M(x,y)$ es de estructura más simple que $N(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable:

$x = yv \quad \rightarrow \quad dx = vdy + ydv.$

$y(vdy + ydv) + \left(y\cos\frac{yv}{y} - yv\right)dy = 0$

$\frac{1}{y}[y(vdy + ydv) + y(\cos v - v)dy] = \frac{1}{y}\cdot 0$; $y \neq 0$ Multiplicando por $\frac{1}{y}$.

$\frac{y(vdy+ydv)}{y} + \frac{y(\cos v - v)dy}{y} = 0$ Simplificando y.

$vdy + ydv + (\cos v - v)dy = 0$

$vdy + ydv + \cos v\, dy - vdy = 0$ Reduciendo términos semejantes.

$ydv + \cos v\, dy = 0$

$\cos v\, dy + ydv = 0$ Acomodando expresiones.

$\frac{dy}{y} + \frac{dv}{\cos v} = 0$

$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dv}{\cos v} = C$; donde C es la constante de integración.

$\ln y + \int \sec v \, dv = C$

$\ln y + \int \sec v \cdot 1 dv = C$

Multiplicando por 1.

$\ln y + \int \sec v \left(\frac{\sec v + \tan v}{\sec v + \tan v}\right) dv = C$

$1 = \frac{\sec v + \tan v}{\sec v + \tan v}$

$\ln y + \int \frac{\sec^2 v + \sec v \tan v}{\sec v + \tan v} dv = C$

Propiedad distributiva en el numerador.

$\ln y + \int \frac{\sec v \tan v + \sec^2 v}{\sec v + \tan v} dv = C$

$\ln y + \ln(\sec v + \tan v) = C$

Propiedad de logaritmo natural:
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln[y(\sec v + \tan v)] = C$

$e^{\ln[y(\sec v + \tan v)]} = e^C$

$e^{\ln u} = u$

$y(\sec v + \tan v) = K; \;\; K = e^C$

Sustituimos $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$y\left(\sec \frac{x}{y} + \tan \frac{x}{y}\right) = K$, solución general de la ED.

$y\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{y}} + \frac{\sin\frac{x}{y}}{\cos\frac{x}{y}}\right) = K$

$y\left(\frac{1+\sin\frac{x}{y}}{\cos\frac{x}{y}}\right) = K$

$y\left(1 + \sin \frac{x}{y}\right) = K \cos \frac{x}{y}$

Ahora calculamos la solución particular con la condición dada, para $x = 0 \wedge \; y = 2$.

$y\left(1 + \sin \frac{x}{y}\right) = K \cos \frac{x}{y}$

$2\left(1 + \sin \frac{0}{2}\right) = K \cos \frac{0}{2}$

$2(1 + 0) = K \cdot 1$

$2(1) = K$

$k = 2$

$\boldsymbol{y\left(1 + \sin\frac{x}{y}\right) = 2\cos\frac{x}{y}}$, solución particular de la ED.

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\cos^2\frac{y}{x}}{x}$; $y(1) = \frac{\pi}{4}$

Solución:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\cos^2\frac{y}{x}}{x}$

$xdy = \left(y + x\cos^2\frac{y}{x}\right)dx$

$\left(y + x\cos^2\frac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x, y) = y + x\cos^2\frac{y}{x}$ $\qquad$ $N(x, y) = -x$

$M(tx, ty) = ty + tx\cos^2\frac{ty}{tx}$ $\qquad$ $N(tx, ty) = -tx$

$M(tx, ty) = ty + tx\cos^2\frac{y}{x}$ $\qquad$ $N(tx, ty) = t(-x)$

$M(tx, ty) = t\left(y + x\cos^2\frac{y}{x}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{N(tx, ty) = tN(x, y)}$

$\boldsymbol{M(tx, ty) = tM(x, y)}$

Así, las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $N(x, y)$ es de estructura más simple que $M(x, y)$, usamos el siguiente cambio de variable:

$y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv.$

$\left(xv + x\cos^2\frac{xv}{x}\right)dx - x(vdx + xdv) = 0$

$x(v+\cos^2 v)dx - x(vdx + xdv) = 0$ Factorizando por x.

$\frac{1}{x}[x(v+\cos^2 v)dx - x(vdx + xdv)] = \frac{1}{x}\cdot 0 \,;\, x \neq 0$ Multiplicando por $\frac{1}{x}$.

$\frac{x(v+\cos^2 v)dx}{x} - \frac{x(vdx+xdv)}{x} = 0$ Simplificando x.

$(v+\cos^2 v)dx - (vdx + xdv) = 0$

$vdx + \cos^2 v\, dx - vdx - xdv = 0$

$\cos^2 v\, dx - xdv = 0$

$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{\cos^2 v} = 0$

$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dv}{\cos^2 v} = C$, donde C es la constante de integración.

$\ln x - \int \sec^2 v\, dv = C$

$\ln x - \tan v = C$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$\ln x - \tan\frac{y}{x} = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular para $y(1) = \frac{\pi}{4}$.es decir, $x = 1 \;\wedge\; y = \frac{\pi}{4}$.

$\ln x - \tan\frac{y}{x} = C$

$\ln 1 - \tan\frac{\frac{\pi}{4}}{1} = C$

$0 - \tan\frac{\pi}{4} = C$

$-1 = C$

$C = -1$

$\ln x - \tan\frac{y}{x} = -1$

$\mathbf{\ln x = \tan\frac{y}{x} - 1}$, solución particular de la ED.

7. $\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx+\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)dy=0\,; sujeta\ a\ y(-5)=3$

Solución:

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y)=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$ $\qquad N(x,y)=\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}$

$M(tx,ty)=\sqrt{tx+ty}+\sqrt{tx-ty}$ $\qquad N(tx,ty)=\sqrt{tx-ty}-\sqrt{tx+ty}$

$M(tx,ty)=\sqrt{t(x+y)}+\sqrt{t(x-y)}$ $\qquad N(tx,ty)=\sqrt{t(x-y)}-\sqrt{t(x+y)}$

$M(tx,ty)=\sqrt{t}\cdot\sqrt{x+y}+\sqrt{t}\cdot\sqrt{x-y}$ $\qquad N(tx,ty)=\sqrt{t}\cdot\sqrt{x-y}-\sqrt{t}\cdot\sqrt{x+y}$

$M(tx,ty)=\sqrt{t}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)$ $\qquad N(tx,ty)=\sqrt{t}\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)$

$M(tx,ty)=t^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)$ $\qquad N(tx,ty)=t^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)$

$\boldsymbol{M(tx,ty)=t^{\frac{1}{2}}M(x,y)}$ $\qquad \boldsymbol{N(tx,ty)=t^{\frac{1}{2}}N(x,y)}$

Así, $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado $\frac{1}{2}$.

En la ED, $\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx+\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)dy=0$. Reescribiendo la ecuación.

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

Como la estructura de $M(x,y)$ y $N(x,y)$, son parecidas y no hay uno más simple. Procedemos a racionalizar la estructura de $M(x,y)$ de la siguiente manera.

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)\cdot 1dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)\left(\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\right)dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\right)dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\frac{(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x-y})^2}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\frac{x+y-(x-y)}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\frac{x+y-x+y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\frac{2y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\left[\frac{2y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy\right]=\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\cdot 0$$

$$\frac{2y(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0$$

$$2ydx-\left[\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\right]dy=0$$

$$2ydx-\left[\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\right]^2dy=0$$

$$2ydx-\left[\left(\sqrt{x+y}\right)^2-2\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x-y}+\left(\sqrt{x-y}\right)^2\right]dy=0$$

$$2ydx-\left(x+y-2\sqrt{x^2-y^2}+x-y\right)dy=0$$

$$2ydx-\left(2x-2\sqrt{x^2-y^2}\right)dy=0$$

$$2ydx-2\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)dy=0$$

$$2\left[ydx-\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)dy\right]=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\left[ydx-\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)dy\right]=\frac{1}{2}\cdot 0$$

$$ydx-\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)dy=0$$

Ahora como la estructura de $M(x,y)$ es más simple que $N(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable: $x=yv \quad \rightarrow \quad dx=vdy+ydv$.

$$y(vdy+ydv)-\left(yv-\sqrt{(yv)^2-y^2}\right)dy=0$$

$$y(vdy+ydv)-\left(yv-\sqrt{y^2v^2-y^2}\right)dy=0$$

$y(vdy + ydv) - \left(yv - \sqrt{y^2(v^2 - 1)}\right)dy = 0$

$y(vdy + ydv) - \left(yv - y\sqrt{v^2 - 1}\right)dy = 0$

$y(vdy + ydv) - y\left(v - \sqrt{v^2 - 1}\right)dy = 0$

$y\left[(vdy + ydv) - \left(v - \sqrt{v^2 - 1}\right)dy\right] = 0$

$\frac{1}{y} \cdot y\left[(vdy + ydv) - \left(v - \sqrt{v^2 - 1}\right)dy\right] = \frac{1}{y} \cdot 0\ ; y \neq 0$

$vdy + ydv - \left(v - \sqrt{v^2 - 1}\right)dy = 0$

$vdy + ydv - vdy + \sqrt{v^2 - 1}dy = 0$

$\sqrt{v^2 - 1}dy + ydv = 0$

$\frac{dy}{y} + \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = 0$

$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = C$, donde C es la constante de integración.

$\ln y + \int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = C$

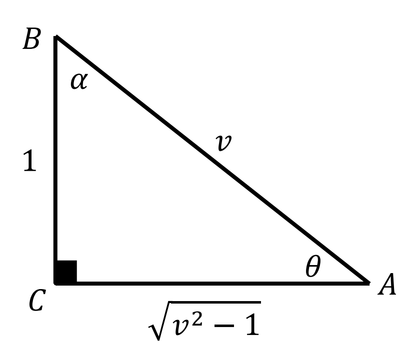
Sea: $I = \int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}}$

$\ln y + I = C$

Calculamos la integral I.

$I = \int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}}$

Resolviendo por sustitución trigonométrica.



$\csc\theta = v$

$v = \csc\theta$

$\frac{d}{d\theta}v = \frac{d}{d\theta}\csc\theta$ Derivada de v con respecto a θ.

$\frac{dv}{d\theta} = -\csc\theta\cot\theta$

$dv = -\csc\theta\cot\theta\, d\theta$ Despejando dv.

$I = \int \frac{-\csc\theta\cot\theta d\theta}{\sqrt{\csc^2\theta - 1}}$ Sustituyendo en la integral.

$I = -\int \frac{\csc\theta\cot\theta d\theta}{\sqrt{\cot^2\theta}}$ $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

$I = -\int \frac{\csc\theta\cot\theta d\theta}{\cot\theta}$ Simplificando.

$I = -\int \csc\theta d\theta$

$I = -\int \csc\theta(1)d\theta$ Multiplicando por 1.

$I = -\int \csc\theta\left(\frac{\csc\theta - \cot\theta}{\csc\theta - \cot\theta}\right)d\theta$ $1 = \frac{\csc\theta - \cot\theta}{\csc\theta - \cot\theta}$

$I = -\int \frac{\csc^2\theta - \csc\theta\cot\theta}{\csc\theta - \cot\theta}d\theta$

$I = -\int \frac{-\csc\theta\cot\theta + \csc^2\theta}{\csc\theta - \cot\theta}d\theta$

$I = -\ln(\csc\theta - \cot\theta)$

$I = -\ln\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \wedge \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$I = -\ln\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$I = \ln\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^{-1}$ $\ln u^n = n\ln u$

$I = \ln\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Escribiendo la integral con la variable original.

$I = \ln\left(\frac{\frac{1}{v}}{1-\frac{\sqrt{v^2-1}}{v}}\right)$

$I = \ln\left(\frac{\frac{1}{v}}{\frac{v-\sqrt{v^2-1}}{v}}\right)$

$I = \ln\left(\frac{1}{v-\sqrt{v^2-1}}\right)$

Sustituyendo I en la $\ln y + I = C$.

$\ln y + \ln\left(\frac{1}{v-\sqrt{v^2-1}}\right) = C$

$\ln\left(y \cdot \frac{1}{v-\sqrt{v^2-1}}\right) = C$

$y \cdot \frac{1}{v-\sqrt{v^2-1}} = e^C$

$y \cdot \frac{1}{v-\sqrt{v^2-1}} = K\ ; K = e^C$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$y \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}-\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}} = K$

$\frac{y}{\frac{x}{y}-\sqrt{\frac{x^2-y^2}{y^2}}} = K$

$\frac{y}{\frac{x}{y}-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}} = K$

$\frac{y}{\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}} = K$

$\frac{y^2}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = K$

$\frac{y^2}{x-\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right) = K$, racionalizando.

$\frac{y^2\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}{x^2-(x^2-y^2)} = K$

$\frac{y^2\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}{x^2-x^2+y^2} = K$

$\frac{y^2\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}{y^2} = K$

$x + \sqrt{x^2 - y^2} = K$, solución general de la ED

Ahora calculamos la solución particular de la ED cuando $x = -5 \;\wedge\; y = 3$.

$x + \sqrt{x^2 - y^2} = K$

$-5 + \sqrt{(-5)^2 - (3)^2} = K$

$-5 + \sqrt{25 - 9} = K$

$-5 + \sqrt{16} = K$

$-5 + 4 = K$

$-1 = K \quad \therefore\; K = -1$

$\boldsymbol{x + \sqrt{x^2 - y^2} = -1}$, solución particular de la ED.

8. $\left(2x\sin\frac{y}{x} + 2x\tan\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} - y\sec^2\frac{y}{x}\right)dx + \left(x\cos\frac{y}{x} + x\sec^2\frac{y}{x}\right)dy = 0$

Solución:

$$\left(2x\sin\frac{y}{x} + 2x\tan\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} - y\sec^2\frac{y}{x}\right)dx + \left(x\cos\frac{y}{x} + x\sec^2\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Comprobamos que la ED es homogénea.

$$M(x,y) = 2x\sin\frac{y}{x} + 2x\tan\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} - y\sec^2\frac{y}{x}$$

$$M(tx,ty) = 2tx\sin\frac{ty}{tx} + 2tx\tan\frac{ty}{tx} - ty\cos\frac{ty}{tx} - ty\sec^2\frac{ty}{tx}$$

$$M(tx,ty) = 2tx\sin\frac{y}{x} + 2tx\tan\frac{y}{x} - ty\cos\frac{y}{x} - ty\sec^2\frac{y}{x}$$

$$M(tx,ty)=t\left(2x\sin\frac{y}{x}+2x\tan\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}-y\sec^2\frac{y}{x}\right)$$

$$\boldsymbol{M(tx,ty)=tM(x,y)}$$

$$N(x,y)=x\cos\frac{y}{x}+x\sec^2\frac{y}{x}$$

$$N(tx,ty)=tx\cos\frac{ty}{tx}+tx\sec^2\frac{ty}{tx}$$

$$N(tx,ty)=tx\cos\frac{y}{x}+tx\sec^2\frac{y}{x}$$

$$N(tx,ty)=t\left(x\cos\frac{y}{x}+x\sec^2\frac{y}{x}\right)$$

$$\boldsymbol{N(tx,ty)=tN(x,y)}$$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado1.

Como $N(x,y)$ es de estructura más simple que $M(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable:

$$y=xv \qquad \rightarrow \qquad dy=vdx+xdv.$$

$$\left(2x\sin\frac{xv}{x}+2x\tan\frac{xv}{x}-xv\cos\frac{xv}{x}-xv\sec^2\frac{xv}{x}\right)dx+\left(x\cos\frac{xv}{x}+x\sec^2\frac{xv}{x}\right)(vdx+xdv)=0$$

$$(2x\sin v+2x\tan v-xv\cos v-xv\sec^2 v)dx+(x\cos v+x\sec^2 v)(vdx+xdv)=0$$

$$x(2\sin v+2\tan v-v\cos v-v\sec^2 v)dx+x(\cos v+\sec^2 v)(vdx+xdv)=0$$

$$\frac{1}{x}[x(2\sin v+2\tan v-v\cos v-v\sec^2 v)dx+x(\cos v+\sec^2 v)(vdx+xdv)]=\frac{1}{x}\cdot 0;\quad x\neq 0$$

$$\frac{x(2\sin v+2\tan v-v\cos v-v\sec^2 v)dx}{x}+\frac{x(\cos v+\sec^2 v)(vdx+xdv)}{x}=0$$

$$(2\sin v+2\tan v-v\cos v-v\sec^2 v)dx+(\cos v+\sec^2 v)(vdx+xdv)=0$$

$$2\sin v\,dx+2\tan v\,dx-v\cos v\,dx-v\sec^2 v\,dx+v\cos v\,dx+x\cos v\,dv+v\sec^2 v\,dx+x\sec^2 v\,dv=0$$

$$2\sin v\,dx+2\tan v\,dx+x\cos v\,dv+x\sec^2 v\,dv=0$$

$$(2\sin v+2\tan v)dx+x(\cos v\,dv+\sec^2 v\,dv)=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{\cos v\,dv+\sec^2 v\,dv}{2\sin v+2\tan v}=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{(\cos v+\sec^2 v)dv}{2(\sin v+\tan v)}=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(\cos v+\sec^2 v)dv}{2(\sin v+\tan v)}=C$$

$$\ln(x)+\frac{1}{2}\int\frac{\cos v+\sec^2 v}{\sin v+\tan v}dv=C$$

$$\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(\sin v+\tan v)=C$$

$$2\left[\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(\sin v+\tan v)=C\right]$$

$$2\ln(x)+\ln(\sin v+\tan v)=2C$$

$$\ln(x^2)+\ln(\sin v+\tan v)=C_1;\;\; C_1=2C$$

$$\ln[x^2(\sin v+\tan v)]=C_1$$

$$x^2(\sin v+\tan v)=e^{C_1}$$

$x^2(\sin v+\tan v)=K;\;\; K=e^{C_1}$. Sustituyendo $v=\frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$x^2\left(\sin\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}\right)=K$$

Entonces, $\boldsymbol{x^2\left(\sin\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}\right)=K}$ es solución general de la ED.

9. $\left(x\sqrt{x^2+y^2}-y^2\right)dx+xydy=0$

Solución: Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$$M(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}-y^2$$

$$M(tx,ty)=tx\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}-(ty)^2$$

$$M(tx,ty)=tx\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}-t^2y^2$$

$M(tx,ty) = tx\sqrt{t^2(x^2+y^2)} - t^2y^2$

$M(tx,ty) = tx\sqrt{t^2}\sqrt{x^2+y^2} - t^2y^2$

$M(tx,ty) = txt\sqrt{x^2+y^2} - t^2y^2$

$M(tx,ty) = t^2x\sqrt{x^2+y^2} - t^2y^2$

$M(tx,ty) = t^2\left(x\sqrt{x^2+y^2} - y^2\right)$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = t^2M(x,y)}$

$N(x,y) = xy$

$N(tx,ty) = tx \cdot ty$

$N(tx,ty) = t^2xy$

$\boldsymbol{N(tx,ty) = t^2N(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$son homogéneas del mismo grado 2.

Como $N(x,y)$ es de estructura más simple que $M(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv.$

$\left(x\sqrt{x^2+(xv)^2} - (xv)^2\right)dx + xxv(vdx + xdv) = 0$

$\left(x\sqrt{x^2+x^2v^2} - x^2v^2\right)dx + x^2v(vdx + xdv) = 0$

$\left(x\sqrt{x^2(1+v^2)} - x^2v^2\right)dx + x^2v(vdx + xdv) = 0$

$\left(x\sqrt{x^2}\sqrt{1+v^2} - x^2v^2\right)dx + x^2v(vdx + xdv) = 0$

$\left(xx\sqrt{1+v^2} - x^2v^2\right)dx + x^2v(vdx + xdv) = 0$

$\left(x^2\sqrt{1+v^2} - x^2v^2\right)dx + x^2v(vdx + xdv) = 0$

$x^2\left(\sqrt{1+v^2} - v^2\right)dx + x^2v(vdx + xdv) = 0$

$$\frac{1}{x^2}\left[x^2\left(\sqrt{1+v^2}-v^2\right)dx+x^2v(vdx+xdv)=0\right]$$

$$\frac{x^2\left(\sqrt{1+v^2}-v^2\right)dx}{x^2}+\frac{x^2v(vdx+xdv)}{x^2}=\frac{0}{x^2};\quad x^2\neq 0$$

$$\left(\sqrt{1+v^2}-v^2\right)dx+v(vdx+xdv)=0$$

$$\sqrt{1+v^2}dx-v^2dx+v^2dx+xvdv=0$$

$$\sqrt{1+v^2}dx+xvdv=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}dv=0$$

$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{vdv}{\sqrt{1+v^2}}=C$, donde Ces la constante de integración.

$$\ln x+\int\frac{\frac{dh}{2}}{\sqrt{h}}=C$$

$$\ln x+\int\frac{dh}{2\sqrt{h}}=C$$

$\ln x+\sqrt{h}=C$, escribiendo $h=1+v^2$, se obtiene:

$$\ln x+\sqrt{1+v^2}=C$$

Sustituyendo $v=\frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln x+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=C$$

$$\ln x+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=C$$

$$\ln x+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=C$$

$$\ln x+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C$$

Sustitución.

$$h=1+v^2$$

$$\frac{d}{dv}h=\frac{d}{dv}(1+v^2)$$

$$\frac{dh}{dv}=2v$$

$$\frac{dh}{2}=vdv$$

$$x\left(\ln x+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C\right)$$

$$x\ln x+\sqrt{x^2+y^2}=Cx$$

$\boldsymbol{\ln x^x+\sqrt{x^2+y^2}=Cx}$, solución general de la ED.

10. Suponga que $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es una ecuación diferencial homogénea. Demuestre que las sustituciones $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ reducen la ecuación a una de variable separable.

Demostración:

Sea $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, una ED homogénea. Luego, $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado, es decir "n".

Consideremos $x=r\cos\theta \quad \wedge \quad y=r\sin\theta$, tenemos:

$$\frac{dx}{dr}=\cos\theta\frac{dr}{dr}+r\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right) \qquad \frac{dy}{dr}=\sin\theta\frac{dr}{dr}+r\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$\frac{dx}{dr}=\cos\theta\frac{dr}{dr}-r\sin\theta\frac{d\theta}{dr} \qquad \frac{dy}{dr}=\sin\theta\frac{dr}{dr}+r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}$$

$$dr\left(\frac{dx}{dr}\right)=dr\left(\cos\theta\frac{dr}{dr}-r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right) \qquad dr\left(\frac{dy}{dr}\right)=dr\left(\sin\theta\frac{dr}{dr}+r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta \qquad dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$M(r\cos\theta\,,r\sin\theta)(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta)+N(r\cos\theta\,,r\sin\theta)(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta)=0$$

$$r^nM(\cos\theta\,,\sin\theta)(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta)+r^nN(\cos\theta\,,\sin\theta)(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta)=0$$

$$\frac{r^nM(\cos\theta\,,\sin\theta)(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta)+r^nN(\cos\theta\,,\sin\theta)(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta)}{r^n}=\frac{0}{r^n}$$

$$\frac{r^n M(\cos\theta, \sin\theta)(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)}{r^n} + \frac{r^n N(\cos\theta, \sin\theta)(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)}{r^n} = 0$$

$$M(\cos\theta, \sin\theta)(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) + N(\cos\theta, \sin\theta)(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) = 0$$

$$M(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta\, dr - rM(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta\, d\theta + N(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta\, dr + rN(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta\, d\theta = 0$$

$$M(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta\, dr + N(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta\, dr + rN(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta\, d\theta - rM(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta\, d\theta = 0$$

$$[M(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + N(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta]dr + r[N(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - M(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta]d\theta = 0$$

$$\frac{dr}{r} + \frac{N(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - M(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta}{M(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + N(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta}d\theta = 0$$

Así, queda demostrado que las sustituciones $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ reducen a la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ a una de variable separable.

11. $y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$

Solución:

Expresemos la ED de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

$$(3x^2 - y^2)dy = 2xydx$$

$$2xydx = (3x^2 - y^2)dy$$

$$2xydx - (3x^2 - y^2)dy = 0$$

$$2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$$

Sea:

$$M(x,y) = 2xy$$

$$M(tx,ty) = 2txty$$

$$M(tx,ty) = 2t^2xy$$

$$M(tx,ty) = t^2(2xy)$$

$\boldsymbol{M(tx,ty)=t^2M(x,y)}$

$N(x,y)=y^2-3x^2$

$N(tx,ty)=(ty)^2-3(tx)^2$

$N(tx,ty)=t^2y^2-3t^2x^2$

$N(tx,ty)=t^2(y^2-3x^2)$

$\boldsymbol{N(tx,ty)=t^2N(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 2.

Como $M(x,y)$ es de estructura más simple que $N(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$x=yv \quad \rightarrow \quad dx=vdy+ydv.$

$2yvy(vdy+ydv)+(y^2-3(yv)^2)dy=0$

$2y^2v(vdy+ydv)+(y^2-3y^2v^2)dy=0$

$2y^2v(vdy+ydv)+y^2(1-3v^2)dy=0$

$$\frac{2y^2v(vdy+ydv)+y^2(1-3v^2)dy}{y^2}=\frac{0}{y^2};\;\; y^2\neq 0$$

$$\frac{y^2[2v(vdy+ydv)+(1-3v^2)dy]}{y^2}=0$$

$2v(vdy+ydv)+(1-3v^2)dy=0$

$2v^2dy+2vydv+dy-3v^2dy=0$

$dy-v^2dy+2vydv=0$

$(1-v^2)dy+2vydv=0$

$$\frac{dy}{y}+\frac{2v}{1-v^2}dv=0$$

$$\frac{dy}{y}-\frac{-2v}{1-v^2}dv=0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{-2v}{1-v^2} dv = C$$

$$\ln y - \ln(1-v^2) = C$$

$$\ln \frac{y}{1-v^2} = C$$

$$\frac{y}{1-v^2} = e^C$$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$$\frac{y}{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2} = K; \quad K = e^C$$

$$\frac{y}{1-\frac{x^2}{y^2}} = K$$

$$\frac{y}{\frac{y^2-x^2}{y^2}} = K$$

$$\frac{yy^2}{y^2-x^2} = K$$

$\boldsymbol{y^3 = K(y^2 - x^2)}$, solución general de la ED.

12. $y\sqrt{x^2+y^2}dx - x\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$

Solución:

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$$M(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$M(tx,ty) = ty\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}$$

$$M(tx,ty) = ty\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}$$

$$M(tx,ty) = ty\sqrt{t^2(x^2+y^2)}$$

$M(tx,ty) = tyt\sqrt{x^2 + y^2}$

$M(tx,ty) = t^2 y\sqrt{x^2 + y^2}$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = t^2 M(x,y)}$

$N(x,y) = -x\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$N(tx,ty) = -tx\left(tx + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}\right)$

$N(tx,ty) = -tx\left(tx + \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}\right)$

$N(tx,ty) = -tx\left(tx + \sqrt{t^2(x^2 + y^2)}\right)$

$N(tx,ty) = -tx\left(tx + t\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$N(tx,ty) = -ttx\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$N(tx,ty) = -t^2x\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$N(tx,ty) = t^2\left[-x\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]$

$\boldsymbol{N(tx,ty) = t^2 N(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 2.

Como $M(x,y)$ es de estructura más simple que $N(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$x = yv \quad \rightarrow \quad dx = vdy + ydv.$

$y\sqrt{(yv)^2 + y^2}(vdy + ydv) - yv\left(yv + \sqrt{(yv)^2 + y^2}\right)dy = 0$

$y\sqrt{y^2v^2 + y^2}(vdy + ydv) - yv\left(yv + \sqrt{y^2v^2 + y^2}\right)dy = 0$

$y\sqrt{y^2(v^2 + 1)}(vdy + ydv) - yv\left(yv + \sqrt{y^2(v^2 + 1)}\right)dy = 0$

$yy\sqrt{v^2 + 1}(vdy + ydv) - yv\left(yv + y\sqrt{v^2 + 1}\right)dy = 0$

$$y^2\sqrt{v^2+1}(vdy+ydv)-yyv\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)dy=0$$

$$y^2\sqrt{v^2+1}(vdy+ydv)-y^2v\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)dy=0$$

$$\frac{y^2\sqrt{v^2+1}(vdy+ydv)-y^2v\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)dy}{y^2}=\frac{0}{y^2};\quad y^2\neq 0$$

$$\frac{y^2\left[\sqrt{v^2+1}(vdy+ydv)-v\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)dy\right]}{y^2}=0$$

$$\sqrt{v^2+1}(vdy+ydv)-v\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)dy=0$$

$$v\sqrt{v^2+1}dy+y\sqrt{v^2+1}dv-v^2dy-v\sqrt{v^2+1}dy=0$$

$$-v^2dy+y\sqrt{v^2+1}dv=0$$

$$-\left(-v^2dy+y\sqrt{v^2+1}dv=0\right)$$

$$v^2dy-y\sqrt{v^2+1}dv=0$$

$$\frac{dy}{y}-\frac{\sqrt{v^2+1}}{v^2}dv=0$$

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{\sqrt{v^2+1}}{v^2}dv=C$$

$$\ln y-\int\frac{\sqrt{v^2+1}}{v^2}dv=C$$

Sea: $I=\int\frac{\sqrt{v^2+1}}{v^2}dv$

$\ln y-I=C$, donde C es la constante de integración.

Calculamos la integral I por sustitución trigonométrica.

$$I=\int\frac{\sqrt{v^2+1}}{v^2}dv$$

$$I = \int \frac{\sqrt{v^2+1}}{v^2}\,dv$$

$$I = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\csc^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\,(1+\cot^2\theta)d\theta$$

$$I = \int (\sec\theta + \sec\theta\cot^2\theta)d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\,d\theta + \int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\left(\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\right)d\theta + \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta + \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\sin\theta)^2}$$

$$I = \int \frac{\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta + \int \frac{du}{u^2}$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) + \int u^{-2}du$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) - u^{-1} + C_1$$

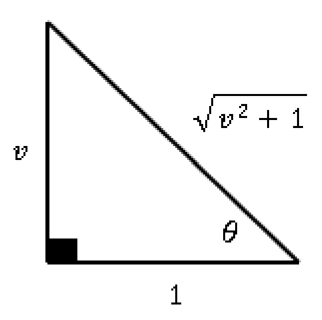
$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) - \frac{1}{u} + C_1$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) - \frac{1}{\sin\theta} + C_1$$

$$I = \ln\left(\sqrt{v^2+1}+v\right) - \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{v^2+1}}} + C_1$$

$$I = \ln\left(\sqrt{v^2+1}+v\right) - \frac{\sqrt{v^2+1}}{v} + C_1$$

Sustitución trigonométrica.



$\tan\theta = \frac{v}{1}$ $\qquad$ $\sec\theta = \sqrt{v^2+1}$

$\tan\theta = v$

$v = \tan\theta \quad \rightarrow \quad v^2 = \tan^2\theta$

$\frac{d}{d\theta}v = \frac{d}{d\theta}\tan\theta$

$\frac{dv}{d\theta} = \sec^2\theta$

$dv = \sec^2\theta\,d\theta$

Sustitución.

$u = \sin\theta$

$\frac{d}{d\theta}u = \frac{d}{d\theta}\sin\theta$

$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$

$du = \cos\theta\,d\theta$

Escribiendo I en $\ln y - I = C$, se obtiene:

$$\ln y - \left[\ln\left(\sqrt{v^2+1}+v\right) - \frac{\sqrt{v^2+1}}{v}\right] = C$$

$$\ln y - \ln\left(\sqrt{v^2+1}+v\right) + \frac{\sqrt{v^2+1}}{v} = C$$

$$\ln\frac{y}{\sqrt{v^2+1}+v} + \frac{\sqrt{v^2+1}}{v} = C$$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$$\ln\frac{y}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{x}{y}} + \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}}{\frac{x}{y}} = C$$

$$\ln\frac{y}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}+\frac{x}{y}} + \frac{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}}{\frac{x}{y}} = C$$

$$\ln\frac{y}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}+\frac{x}{y}} + \frac{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}}{\frac{x}{y}} = C$$

$$\ln\frac{y}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}+\frac{x}{y}} + \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}{\frac{x}{y}} = C$$

$$\ln\frac{y}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = C$$

$$\ln\frac{yy}{\sqrt{x^2+y^2}+x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = C$$

$$\ln\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}+x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C$$

$$\ln\left[\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right)\right]+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C$$

$$\ln\left[\frac{y^2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}{x^2+y^2-x^2}\right]+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C$$

$$\ln\left[\frac{y^2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}{y^2}\right]+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C$$

$$x\left[\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C\right]$$

$\boldsymbol{x\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)+\sqrt{x^2+y^2}=Cx}$, solución general de la ED.

13. $(y-xy')^2=x^2+y^2$

Solución:

Transformamos la ED de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2+y^2$$

$$\sqrt{\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y-x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y-\sqrt{x^2+y^2}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=xdy$$

$\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y)=y-\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad N(x,y)=-x$

$M(tx,ty)=ty-\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}$ $\qquad N(tx,ty)=-tx$

$M(tx,ty)=ty-\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}$ $\qquad N(tx,ty)=t(-x)$

$M(tx,ty)=ty-\sqrt{t^2(x^2+y^2)}$ $\qquad \boldsymbol{N(tx,ty)=tN(x,y)}$

$M(tx,ty)=ty-t\sqrt{x^2+y^2}$

$M(tx,ty)=t\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$\boldsymbol{M(tx,ty)=tM(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $N(x,y)$es de estructura más simple que $M(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$y=xv \quad\rightarrow\quad dy=vdx+xdv.$

$\left(xv-\sqrt{x^2+(xv)^2}\right)dx-x(vdx+xdv)=0$

$\left(xv-\sqrt{x^2+x^2v^2}\right)dx-x(vdx+xdv)=0$

$\left(xv-\sqrt{x^2(1+v^2)}\right)dx-x(vdx+xdv)=0$

$\left(xv-x\sqrt{1+v^2}\right)dx-x(vdx+xdv)=0$

$x\left(v-\sqrt{1+v^2}\right)dx-x(vdx+xdv)=0$

$\frac{x\left(v-\sqrt{1+v^2}\right)dx-x(vdx+xdv)}{x}=\frac{0}{x};\quad x\neq 0$

$$\frac{x\left[\left(v-\sqrt{1+v^2}\right)dx-(vdx+xdv)\right]}{x}=0$$

$$\left(v-\sqrt{1+v^2}\right)dx-(vdx+xdv)=0$$

$$vdx-\sqrt{1+v^2}dx-vdx-xdv=0$$

$$-\sqrt{1+v^2}dx-xdv=0$$

$$-\left(-\sqrt{1+v^2}dx-xdv=0\right)$$

$$\sqrt{1+v^2}dx+xdv=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv=C$$

$$\ln x+\int\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv=C$$

$$\ln x+\int\cos\theta\sec^2\theta\,d\theta=C$$

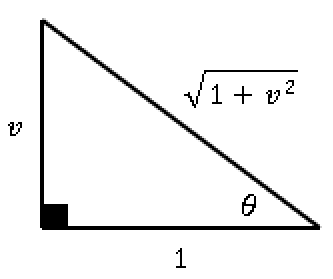
$$\ln x+\int\frac{1}{\sec\theta}\sec^2\theta\,d\theta=C$$

$$\ln x+\int\sec\theta\,d\theta=C$$

$$\ln x+\ln(\sec\theta+\tan\theta)=C$$

$$\ln x+\ln\left(\sqrt{1+v^2}+v\right)=C$$

Sustitución trigonométrica.



$\tan\theta=v$ $\qquad\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}$

$$\frac{d}{d\theta}v=\frac{d}{d\theta}\tan\theta$$

$$\frac{dv}{d\theta}=\sec^2\theta$$

$$dv=\sec^2\theta\,d\theta$$

Sustituyendo $v=\frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln x+\ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}\right)=C$$

$$\ln x+\ln\left(\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}\right)=C$$

$$\ln x+\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}\right)=C$$

$\ln x + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x}\right) = C$

$\ln x + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right) = C$

$\ln\left[x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right)\right] = C$

$\ln\left(\sqrt{x^2+y^2} + y\right) = C$

$\sqrt{x^2+y^2} + y = e^C$

$\boldsymbol{\sqrt{x^2+y^2} + y = K}$; $\quad K = e^C$, solución general de la ED.

14. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

Solución:

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y) = y$

$M(tx,ty) = ty$

$M(tx,ty) = t($

$\boldsymbol{M(tx,ty) = tM(x,y)}$

$N(x,y) = 2\sqrt{xy} - x$

$N(tx,ty) = 2\sqrt{txty} - tx$

$N(tx,ty) = 2\sqrt{t^2xy} - tx$

$N(tx,ty) = 2t\sqrt{xy} - tx$

$N(tx,ty) = t\left(2\sqrt{xy} - x\right)$

$\boldsymbol{N(tx,ty) = tN(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $M(x,y)$ es de estructura más simple que $N(x,y)$, usando el siguiente cambio de variable

$x = yv \quad \rightarrow \quad dx = vdy + ydv.$

$$y(vdy + ydv) + \left(2\sqrt{yvy} - yv\right)dy = 0$$

$$y(vdy + ydv) + \left(2\sqrt{y^2v} - yv\right)dy = 0$$

$$y(vdy + ydv) + \left(2y\sqrt{v} - yv\right)dy = 0$$

$$y(vdy + ydv) + y\left(2\sqrt{v} - v\right)dy = 0$$

$$\frac{y(vdy + ydv) + y\left(2\sqrt{v} - v\right)dy}{y} = \frac{0}{y}; \quad y \neq 0$$

$$\frac{y\left[vdy + ydv + \left(2\sqrt{v} - v\right)dy\right]}{y} = 0$$

$$vdy + ydv + \left(2\sqrt{v} - v\right)dy$$

$$vdy + ydv + 2\sqrt{v}dy - vdy = 0$$

$$2\sqrt{v}dy + ydv = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{1}{2\sqrt{v}}dv = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1}{2\sqrt{v}}dv = C$$

$$\ln y + \sqrt{v} = C$$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$$\ln y + \sqrt{\frac{x}{y}} = C$$

$$\ln y + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = C$$

$$\sqrt{y}\left(\ln y + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = C\right)$$

$\boldsymbol{\sqrt{y}\ln y + \sqrt{x} = C\sqrt{y}}$, solución general de la ED.

15. $\left(x+\sqrt{xy}\right)y'+x-y=x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$; $y(1)=1$

Solución:

Transformamos la ED de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$$\left(x+\sqrt{xy}\right)\frac{dy}{dx}+x-y=x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(x+\sqrt{xy}\right)\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y-x$$

$$\left(x+\sqrt{xy}\right)dy=\left(x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y-x\right)dx$$

$$-\left(x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y-x\right)dx+\left(x+\sqrt{xy}\right)dy=0$$

$$\left(x-y-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)dx+\left(x+\sqrt{xy}\right)dy=0$$

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y)=x-y-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

$M(tx,ty)=tx-ty-(tx)^{-\frac{1}{2}}(ty)^{\frac{3}{2}}$

$M(tx,ty)=tx-ty-t^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

$M(tx,ty)=tx-ty-tx^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

$M(tx,ty)=t\left(x-y-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)$

$\boldsymbol{M(tx,ty)=tM(x,y)}$

$N(x,y)=x+\sqrt{xy}$

$N(tx,ty)=tx+\sqrt{txty}$

$N(tx,ty)=tx+\sqrt{t^2xy}$

$N(tx,ty)=tx+t\sqrt{xy}$

$N(tx,ty)=t\left(x+\sqrt{xy}\right)$

$\boldsymbol{N(tx,ty)=tN(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $N(x,y)$ es de estructura más simple que $M(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$y=xv \quad\rightarrow\quad dy=vdx+xdv$.

$$\left(x - xv - x^{-\frac{1}{2}}(xv)^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(x + \sqrt{xxv}\right)(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x - xv - x^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(x + \sqrt{x^2v}\right)(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x - xv - xv^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(x + x\sqrt{v}\right)(vdx + xdv) = 0$$

$$x\left(1 - v - v^{\frac{3}{2}}\right)dx + x\left(1 + \sqrt{v}\right)(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{x\left(1 - v - v^{\frac{3}{2}}\right)dx + x\left(1 + \sqrt{v}\right)(vdx + xdv)}{x} = \frac{0}{x}; \quad x \neq 0$$

$$\frac{x\left[\left(1 - v - v^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(1 + \sqrt{v}\right)(vdx + xdv)\right]}{x} = 0$$

$$\left(1 - v - v^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(1 + \sqrt{v}\right)(vdx + xdv) = 0$$

$$dx - vdx - v^{\frac{3}{2}}dx + vdx + xdv + v\sqrt{v}dx + x\sqrt{v}dv = 0$$

$$dx - v^{\frac{3}{2}}dx + xdv + vv^{\frac{1}{2}}dx + x\sqrt{v}dv = 0$$

$$dx - v^{\frac{3}{2}}dx + xdv + v^{\frac{3}{2}}dx + x\sqrt{v}dv = 0$$

$$dx + xdv + x\sqrt{v}dv = 0$$

$$dx + x\left(1 + \sqrt{v}\right)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \left(1 + \sqrt{v}\right)dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \left(1 + \sqrt{v}\right)dv = C$$

$$\ln x + \int dv + \int v^{\frac{1}{2}}\, dv = C$$

$$\ln x + v + \frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} = C$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln x + \frac{y}{x} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = C$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = 1$.

$$\ln 1 + \frac{1}{1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}} = C$$

$$0 + 1 + \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = C$$

$$1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = C$$

$$1 + \frac{2}{3} = C$$

$$\frac{5}{3} = C \qquad \rightarrow \quad C = \frac{5}{3}$$

$$\ln x + \frac{y}{x} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$$

$$\ln x + \frac{y}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{5}{3}$$

$$3x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x + \frac{y}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{5}{3}\right)$$

$$3x^{\frac{3}{2}} \ln x + 3x^{\frac{3}{2}}\frac{y}{x} + 3x^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = 3x^{\frac{3}{2}}\frac{5}{3}$$

$$3x^{\frac{3}{2}} \ln x + 3x^{\frac{1}{2}}y + 2y^{\frac{3}{2}} = 5x^{\frac{3}{2}}$$

Entonces, $\mathbf{3x\sqrt{x}\ln x + 3y\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} = 5x\sqrt{x}}$ es solucion particular de la ED.

16. $x\frac{dy}{dx} = x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y; \quad y(2) = \pi$

Solución:

Transformamos la ED de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$$x\frac{dy}{dx} = x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y$$

$$xdy = \left[x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y\right]dx$$

$$\left[x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y\right]dx = xdy$$

$$\left[x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y\right]dx - xdy = 0$$

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y) = x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y$ $\qquad$ $N(x,y) = -x$

$M(tx,ty) = tx\sec\left(\frac{ty}{tx}\right) + ty$ $\qquad$ $N(tx,ty) = -tx$

$M(tx,ty) = tx\sec\left(\frac{y}{x}\right) + ty$ $\qquad$ $N(tx,ty) = t(-x)$

$M(tx,ty) = t\left[x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y\right]$ $\qquad$ $\boldsymbol{N(tx,ty) = tN(x,y)}$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = tM(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $N(x,y)$ es de estructura más simple que $M(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable $y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv$.

$$\left[x\sec\left(\frac{xv}{x}\right) + xv\right]dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$(x\sec v + xv)dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$x(\sec v + v)dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{x(\sec v + v)dx - x(vdx + xdv)}{x} = \frac{0}{x}; \quad x \neq 0$$

$$\frac{x[(\sec v + v)dx - (vdx + xdv)]}{x} = 0$$

$$(\sec v + v)dx - (vdx + xdv) = 0$$

$$\sec v\, dx + vdx - vdx - xdv = 0$$

$$\sec v\, dx - xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{1}{\sec v}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1}{\sec v}dv = C$$

$$\ln x - \int \cos v\, dv = C$$

$$\ln x - \sin v = C$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$\ln x - \sin \frac{y}{x} = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 2$, $y = \pi$.

$$\ln 2 - \sin \frac{\pi}{2} = C$$

$$\ln 2 - 1 = C$$

$$C = \ln 2 - 1$$

$$\ln x - \sin \frac{y}{x} = \ln 2 - 1$$

$$\ln x - \ln 2 + 1 = \sin \frac{y}{x}$$

$$\ln \frac{x}{2} + 1 = \sin \frac{y}{x}$$

$$\sin \frac{y}{x} = \ln \frac{x}{2} + 1$$

$\frac{y}{x} = \sin^{-1}\left(\ln\frac{x}{2} + 1\right)$

$\boldsymbol{y = x\sin^{-1}\left(\ln\frac{x}{2} + 1\right)}$, solución particular explícita de la ED.

17. $y^2dx + \left(x\sqrt{y^2 - x^2} - xy\right)dy = 0; \quad y(4) = 5$

Solución:

Comprobemos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x, y) = y^2$

$M(tx, ty) = (ty)^2$

$M(tx, ty) = t^2y^2$

$M(tx, ty) = t^2(y^2)$

$\boldsymbol{M(tx, ty) = t^2M(x, y)}$

$N(x, y) = x\sqrt{y^2 - x^2} - xy$

$N(tx, ty) = tx\sqrt{(ty)^2 - (tx)^2} - txty$

$N(tx, ty) = tx\sqrt{t^2y^2 - t^2x^2} - t^2xy$

$N(tx, ty) = tx\sqrt{t^2(y^2 - x^2)} - t^2xy$

$N(tx, ty) = txt\sqrt{y^2 - x^2} - t^2xy$

$N(tx, ty) = t^2x\sqrt{y^2 - x^2} - t^2xy$

$N(tx, ty) = t^2\left(x\sqrt{y^2 - x^2} - xy\right)$

$\boldsymbol{N(tx, ty) = t^2N(x, y)}$

Así, las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado 2.

Como $M(x, y)$ es de estructura más simple que $N(x, y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$x = yv \quad \rightarrow \quad dx = vdy + ydv.$

$y^2(vdy + ydv) + \left(yv\sqrt{y^2 - (yv)^2} - yvy\right)dy = 0$

$y^2(vdy + ydv) + \left(yv\sqrt{y^2 - y^2v^2} - y^2v\right)dy = 0$

$y^2(vdy + ydv) + \left(yv\sqrt{y^2(1 - v^2)} - y^2v\right)dy = 0$

$$y^2(vdy + ydv) + \left(yvy\sqrt{1 - v^2} - y^2v\right)dy = 0$$

$$y^2(vdy + ydv) + \left(y^2v\sqrt{1 - v^2} - y^2v\right)dy = 0$$

$$y^2(vdy + ydv) + y^2\left(v\sqrt{1 - v^2} - v\right)dy = 0$$

$$\frac{y^2(vdy + ydv) + y^2\left(v\sqrt{1 - v^2} - v\right)dy}{y^2} = \frac{0}{y^2}; \quad y^2 \neq 0$$

$$\frac{y^2\left[vdy + ydv + \left(v\sqrt{1 - v^2} - v\right)dy\right]}{y^2} = 0$$

$$vdy + ydv + \left(v\sqrt{1 - v^2} - v\right)dy = 0$$

$$vdy + ydv + v\sqrt{1 - v^2}dy - vdy = 0$$

$$v\sqrt{1 - v^2}dy + ydv = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{1}{v\sqrt{1 - v^2}}dv = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1}{v\sqrt{1 - v^2}}dv = C$$

$$\ln y + \int \frac{1}{v\sqrt{1 - v^2}}dv = C$$

$$\ln y + \int \frac{1}{v}\left(-\frac{du}{v}\right) = C$$

$$\ln y - \int \frac{du}{v^2} = C$$

$$\ln y - \int \frac{du}{1 - u^2} = C$$

$$\ln y - \int \frac{du}{-(u^2 - 1)} = C$$

$$\ln y + \int \frac{du}{u^2 - 1} = C$$

Sustitución.

$$u = \sqrt{1 - v^2} \qquad (u)^2 = \left(\sqrt{1 - v^2}\right)^2$$

$$\frac{d}{dv}u = \frac{d}{dv}\left(\sqrt{1 - v^2}\right) \qquad u^2 = 1 - v^2$$

$$v^2 = 1 - u^2$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{-2v}{2\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\frac{du}{dv} = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$-\frac{du}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}dv$$

$$\ln y + \int \frac{1}{(u+1)(u-1)} du = C$$

$$\ln y + \int \left(\frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} \right) du = C$$

$$\ln y + \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{u+1} + \frac{\frac{1}{2}}{u-1} \right) du = C$$

$$\ln y + \int \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u-1} \right) du = C$$

$$\ln y - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u+1} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} du = C$$

$$\ln y - \frac{1}{2} \ln(u+1) + \frac{1}{2} \ln(u-1) = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2} [\ln(u-1) - \ln(u+1)] = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} = C$$

Escribiendo con la variable original v.

$$\ln y + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-v^2} - 1}{\sqrt{1-v^2} + 1} = C$$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$$\ln y + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2} + 1} = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2} - 1}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2} + 1}} = C$$

Fracciones parciales

$$\frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$$1 = A(u-1) + B(u+1)$$

$$A(u-1) + B(u+1) = 1$$

Evaluando para $u = 1$, se obtiene:

$$A(1-1) + B(1+1) = 1$$

$$A(0) + B(2) = 1$$

$$2B = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B = \frac{1}{2}}$$

Evaluando para $u = -1$, se obtiene:

$$A(-1-1) + B(-1+1) = 1$$

$$A(-2) + B(0) = 1$$

$$-2A = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = -\frac{1}{2}}$$

$$\ln y + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\frac{y^2 - x^2}{y^2}} - 1}{\sqrt{\frac{y^2 - x^2}{y^2}} + 1} = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y} - 1}{\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y} + 1} = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{y}}{\frac{\sqrt{y^2 - x^2} + y}{y}} = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} + y} = C$$

$$\ln y + \ln\left[\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} + y}\right]^{\frac{1}{2}} = C$$

$$\ln\left[y\left(\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{y + \sqrt{y^2 - x^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = C$$

$$y\left(\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} + y}\right)^{\frac{1}{2}} = e^C$$

$$\left[y\left(\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} + y}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = (e^C)^2$$

$$y^2\left(\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} + y}\right) = C_1; \qquad C_1 = (e^C)^2$$

$$y^2\left(\frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} + y} \cdot \frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} - y}\right) = C_1$$

$$y^2\left[\frac{\left(\sqrt{y^2-x^2}-y\right)^2}{y^2-x^2-y^2}\right]=C_1$$

$$y^2\left[\frac{\left(y-\sqrt{y^2-x^2}\right)^2}{-x^2}\right]=C_1$$

$$y^2\left[\frac{\left(y-\sqrt{y^2-x^2}\right)^2}{x^2}\right]=-C_1$$

$$y^2\,\frac{\left(y-\sqrt{y^2-x^2}\right)^2}{x^2}=C_2;\quad C_2=-C_1$$

$$\sqrt{\frac{y^2\left(y-\sqrt{y^2-x^2}\right)^2}{x^2}}=\sqrt{C_2}$$

$$\frac{y\left(y-\sqrt{y^2-x^2}\right)}{x}=K;\quad K=\sqrt{C_2}$$

Calculemos la solución particular de la ED para $x=4$, $y=5$.

$$\frac{5\left(5-\sqrt{5^2-4^2}\right)}{4}=K$$

$$\frac{5\left(5-\sqrt{25-16}\right)}{4}=K$$

$$\frac{5\left(5-\sqrt{9}\right)}{4}=K$$

$$\frac{5(5-3)}{4}=K$$

$$\frac{5(2)}{4}=K$$

$$\frac{5}{2}=K\quad\rightarrow\quad K=\frac{5}{2}$$

$$\frac{y\left(y-\sqrt{y^2-x^2}\right)}{x}=\frac{5}{2}$$

$\boldsymbol{y\left(y-\sqrt{y^2-x^2}\right)=\frac{5}{2}x}$, solución particular de la ED.

18. $xy' - y = \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}; \quad y(1) = 1$

Solución:

Transformamos la ED de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

$x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$x\frac{dy}{dx} = y + \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$xdy = \left(y + \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}\right)dx$

$\left(y + \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}\right)dx = xdy$

$\left(y + \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}\right)dx - xdy = 0$

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x, y) = y + \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$ $\qquad N(x, y) = -x$

$M(tx, ty) = ty + \frac{tx}{\tan^{-1}\frac{ty}{tx}}$ $\qquad N(tx, ty) = -tx$

$M(tx, ty) = ty + \frac{tx}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$ $\qquad N(tx, ty) = t(-x)$

$M(tx, ty) = t\left(y + \frac{x}{\tan^{-1}\frac{y}{x}}\right)$ $\qquad \boldsymbol{N(tx, ty) = tN(x, y)}$

$\boldsymbol{M(tx, ty) = tM(x, y)}$

Así, las funciones$M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $N(x, y)$ es de estructura más simple $M(x, y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv.$

$$\left(xv + \frac{x}{\tan^{-1}\frac{xv}{x}}\right) dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$x\left(v + \frac{1}{\tan^{-1} v}\right) dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{x\left(v + \frac{1}{\tan^{-1} v}\right) dx - x(vdx + xdv)}{x} = \frac{0}{x}; \quad x \neq 0$$

$$\frac{x\left[\left(v + \frac{1}{\tan^{-1} v}\right) dx - (vdx + xdv)\right]}{x} = 0$$

$$\left(v + \frac{1}{\tan^{-1} v}\right) dx - (vdx + xdv) = 0$$

$$vdx + \frac{1}{\tan^{-1} v} dx - vdx - xdv = 0$$

$$\frac{1}{\tan^{-1} v} dx - xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \tan^{-1} v \, dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \tan^{-1} v \, dv = C$$

$$\ln x - \int \tan^{-1} v \, dv = C$$

$$\ln x - \left(v \tan^{-1} v - \int v \cdot \frac{1}{1 + v^2} dv\right) = C$$

$$\ln x - v \tan^{-1} v + \int \frac{v}{1 + v^2} dv = C$$

$$\ln x - v \tan^{-1} v + \frac{1}{2} \int \frac{2v}{1 + v^2} dv = C$$

$$\ln x - v \tan^{-1} v + \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = C$$

Integración por partes.

$$u_1 = \tan^{-1} v \qquad dv_1 = dv$$

$$\frac{d}{dv} u_1 = \frac{d}{dv}(\tan^{-1} v) \qquad \int dv_1 = \int dv$$

$$\frac{du_1}{dv} = \frac{1}{1 + v^2} \qquad v_1 = v$$

$$du_1 = \frac{1}{1 + v^2} dv$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln x - \frac{y}{x} \tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = C$$

$$\ln x - \frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = C$$

$$\ln x - \frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = C$$

$$2\left[\ln x - \frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = C\right]$$

$$2\ln x - 2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = 2C$$

$$\ln x^2 - 2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) - \ln x^2 = 2C$$

$$-\left(-2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = 2C\right)$$

$$2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = -2C$$

$$2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = K; \quad K = -2C$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = 1$.

$$2 \cdot \frac{1}{1}\tan^{-1}\frac{1}{1} - \ln(1^2 + 1^2) = K$$

$$2\tan^{-1} 1 - \ln(1 + 1) = K$$

$$2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln(2) = K$$

$$\frac{\pi}{2} - \ln(2) = K \quad \rightarrow \quad K = \frac{\pi}{2} - \ln(2)$$

$$2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{2} - \ln(2)$$

$$2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2) - \ln(2) + \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{2\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} = \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}$$

19. $\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xy\sqrt{x^2 + y^2}dy = 0$

Solución:

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$M(x,y) = x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2}$

$M(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^2\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}$

$M(tx,ty) = t^3x^3 + t^2y^2\sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}$

$M(tx,ty) = t^3x^3 + t^2y^2\sqrt{t^2(x^2 + y^2)}$

$M(tx,ty) = t^3x^3 + t^2y^2t\sqrt{x^2 + y^2}$

$M(tx,ty) = t^3x^3 + t^3y^2\sqrt{x^2 + y^2}$

$M(tx,ty) = t^3\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = t^3M(x,y)}$

$N(x,y) = -xy\sqrt{x^2 + y^2}$

$N(tx,ty) = -txty\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}$

$N(tx,ty) = -t^2xy\sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}$

$N(tx,ty) = -t^2xy\sqrt{t^2(x^2 + y^2)}$

$N(tx,ty) = -t^2xyt\sqrt{x^2 + y^2}$

$N(tx,ty) = -t^3xy\sqrt{x^2 + y^2}$

$N(tx,ty) = t^3\left(-xy\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$\boldsymbol{N(tx,ty) = t^3N(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 3.

Como $N(x,y)$ es de estructura más simple que $M(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv.$

$$\left(x^3 + (xv)^2\sqrt{x^2 + (xv)^2}\right)dx - xxv\sqrt{x^2 + (xv)^2}(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x^3 + x^2v^2\sqrt{x^2 + x^2v^2}\right)dx - x^2v\sqrt{x^2 + x^2v^2}(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x^3 + x^2v^2\sqrt{x^2(1 + v^2)}\right)dx - x^2v\sqrt{x^2(1 + v^2)}(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x^3 + x^2v^2x\sqrt{1 + v^2}\right)dx - x^2vx\sqrt{1 + v^2}(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x^3 + x^3v^2\sqrt{1 + v^2}\right)dx - x^3v\sqrt{1 + v^2}(vdx + xdv) = 0$$

$$x^3\left(1+v^2\sqrt{1+v^2}\right)dx - x^3v\sqrt{1+v^2}(vdx+xdv) = 0$$

$$\frac{x^3\left(1+v^2\sqrt{1+v^2}\right)dx - x^3v\sqrt{1+v^2}(vdx+xdv)}{x^3} = \frac{0}{x^3}; \quad x^3 \neq 0$$

$$\frac{x^3\left[\left(1+v^2\sqrt{1+v^2}\right)dx - v\sqrt{1+v^2}(vdx+xdv)\right]}{x^3} = \frac{0}{x^3}$$

$$\left(1+v^2\sqrt{1+v^2}\right)dx - v\sqrt{1+v^2}(vdx+xdv) = 0$$

$$dx + v^2\sqrt{1+v^2}dx - v^2\sqrt{1+v^2}dx - xv\sqrt{1+v^2}dv = 0$$

$$dx - xv\sqrt{1+v^2}dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - v\sqrt{1+v^2}dv = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} - \int v\sqrt{1+v^2}dv = C$$

Sustitución.

$u = 1 + v^2$

$\frac{d}{dv}u = \frac{d}{dv}(1+v^2)$

$\frac{du}{dv} = 2v$

$\frac{du}{2} = vdv$

$$\ln x - \int\sqrt{1+v^2}vdv = C$$

$$\ln x - \int\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2} = C$$

$$\ln x - \int\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2} = C$$

$$\ln x - \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = C$$

$$\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = C$$

$\ln x - \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} = C$, escribiendo u en términos de v, se obtiene:

$$\ln x - \frac{1}{3}(1+v^2)^{\frac{3}{2}} = C$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln x - \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = C$$

$$\ln x - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} = C$$

$$\ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} = C$$

$$\ln x - \frac{1}{3}\frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} = C$$

$$\ln x - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{x^3} = C$$

$$3x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{x^3} = C\right)$$

$$3x^3 \ln x - \sqrt{(x^2 + y^2)^3} = 3Cx^3$$

$$x^3 \ln x^3 - 3Cx^3 = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$x^3(\ln x^3 - 3C) = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$x^3(\ln x^3 + \ln K) = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}; \quad \ln K = -3C$$

$$x^3 \ln Kx^3 = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

Entonces, $\boldsymbol{x^3 \ln Kx^3 = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ es solución general de la ED.

20. $x(x^2+y^2)dy = y\left(x^2+y\sqrt{x^2+y^2}+y^2\right)dx$

Solución:

Transformamos la ED de ña forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$$x(x^2+y^2)dy = y\left(x^2+y\sqrt{x^2+y^2}+y^2\right)dx$$

$$y\left(x^2+y\sqrt{x^2+y^2}+y^2\right)dx = x(x^2+y^2)dy$$

$$\left(x^2y+y^2\sqrt{x^2+y^2}+y^3\right)dx = (x^3+xy^2)dy$$

$$\left(x^2y+y^2\sqrt{x^2+y^2}+y^3\right)dx - (x^3+xy^2)dy = 0$$

Comprobamos que la ED es homogénea.

Sea:

$$M(x,y) = x^2y+y^2\sqrt{x^2+y^2}+y^3$$

$$M(tx,ty) = (tx)^2ty+(ty)^2\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}+(ty)^3$$

$$M(tx,ty) = t^2x^2ty+t^2y^2\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}+t^3y^3$$

$$M(tx,ty) = t^3x^2y+t^2y^2\sqrt{t^2(x^2+y^2)}+t^3y^3$$

$$M(tx,ty) = t^3x^2y+t^2y^2t\sqrt{x^2+y^2}+t^3y^3$$

$$M(tx,ty) = t^3x^2y+t^3y^2\sqrt{x^2+y^2}+t^3y^3$$

$$M(tx,ty) = t^3\left(x^2y+y^2\sqrt{x^2+y^2}+y^3\right)$$

$$\boldsymbol{M(tx,ty) = t^3M(x,y)}$$

$$N(x,y) = -(x^3+xy^2)$$

$$N(tx,ty) = -((tx)^3+tx(ty)^2)$$

$$N(tx,ty) = -(t^3x^3+txt^2y^2)$$

$$N(tx,ty) = -(t^3x^3+t^3xy^2)$$

$$N(tx,ty) = -t^3(x^3+xy^2)$$

$$N(tx,ty) = t^3[-(x^3+xy^2)]$$

$$\boldsymbol{N(tx,ty) = t^3N(x,y)}$$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 3.

Como $N(x,y)$ es de estructura más simple que $M(x,y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv.$

$$\left(x^2xv+(xv)^2\sqrt{x^2+(xv)^2}+(xv)^3\right)dx - (x^3+x(xv)^2)(vdx+xdv) = 0$$

$$\left(x^3v + x^2v^2\sqrt{x^2 + x^2v^2} + x^3v^3\right)dx - (x^3 + xx^2v^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x^3v + x^2v^2\sqrt{x^2(1 + v^2)} + x^3v^3\right)dx - (x^3 + x^3v^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x^3v + x^2v^2x\sqrt{1 + v^2} + x^3v^3\right)dx - x^3(1 + v^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$\left(x^3v + x^3v^2\sqrt{1 + v^2} + x^3v^3\right)dx - x^3(1 + v^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^3\left(v + v^2\sqrt{1 + v^2} + v^3\right)dx - x^3(1 + v^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{x^3\left(v + v^2\sqrt{1 + v^2} + v^3\right)dx - x^3(1 + v^2)(vdx + xdv)}{x^3} = \frac{0}{x^3}; \quad x^3 \neq 0$$

$$\frac{x^3\left[\left(v + v^2\sqrt{1 + v^2} + v^3\right)dx - (1 + v^2)(vdx + xdv)\right]}{x^3} = 0$$

$$\left(v + v^2\sqrt{1 + v^2} + v^3\right)dx - (1 + v^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$vdx + v^2\sqrt{1 + v^2}dx + v^3dx - (vdx + xdv + v^3dx + xv^2dv) = 0$$

$$vdx + v^2\sqrt{1 + v^2}dx + v^3dx - vdx - xdv - v^3dx - xv^2dv = 0$$

$$v^2\sqrt{1 + v^2}dx - xdv - xv^2dv = 0$$

$$v^2\sqrt{1 + v^2}dx - x(1 + v^2)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{1 + v^2}{v^2\sqrt{1 + v^2}}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1 + v^2}{v^2\sqrt{1 + v^2}}dv = C$$

$$\ln x - \int \frac{1 + v^2}{v^2\sqrt{1 + v^2}}dv = C$$

Sea: $I = \int \frac{1+v^2}{v^2\sqrt{1+v^2}}dv$

$\ln x - I = C$, donde C es la constante de integración.

Calculamos la integral I.

$$I = \int \frac{1+v^2}{v^2\sqrt{1+v^2}}\,dv$$

$$I = \int \frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta\sec\theta}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\sec\theta\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^3\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^3\theta}{\sin^2\theta\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\csc^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\,(1+\cot^2\theta)\,d\theta$$

$$I = \int(\sec\theta + \sec\theta\cot^2\theta)d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\,d\theta + \int \sec\theta\cot^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int \sec\theta\left(\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\right)d\theta + \int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta + \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta + \int \frac{\cos\theta}{(\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) + \int \frac{\cos\theta}{(\sin\theta)^2}\,d\theta + C_1$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) + \int \frac{\cos\theta}{(\sin\theta)^2}\,d\theta + C_1$$

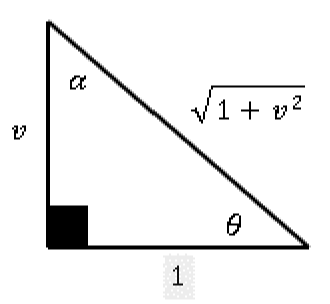
$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) + \int \frac{du}{u^2} + C_1$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) + \int u^{-2}du + C_1$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) - u^{-1} + C_1$$

$$I = \ln(\sec\theta+\tan\theta) - \frac{1}{u} + C_1$$

Sustitución trigonométrica.



$\tan\theta = v$ $\quad\quad$ $\sec\theta = \sqrt{1+v^2}$

$v = \tan\theta \quad\rightarrow\quad v^2 = \tan^2\theta$

$\frac{d}{d\theta}v = \frac{d}{d\theta}(\tan\theta)$

$\frac{dv}{d\theta} = \sec^2\theta$

$dv = \sec^2\theta\,d\theta$

Sustitución.

$u = \sin\theta$

$\frac{d}{d\theta}u = \frac{d}{d\theta}\sin\theta$

$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$

$du = \cos\theta\,d\theta$

$$I = \ln(\sec\theta + \tan\theta) - \frac{1}{\sin\theta} + C_1$$

$$I = \ln(\sec\theta + \tan\theta) - \csc\theta + C_1$$

Escribiendo I en términos de v.

$$I = \ln\left(\sqrt{1+v^2} + v\right) - \frac{\sqrt{1+v^2}}{v} + C_1$$

Sustituyendo Ien $\ln x - I = C$, se obtiene:

$$\ln x - \ln\left(\sqrt{1+v^2} + v\right) + \frac{\sqrt{1+v^2}}{v} = C$$

$$\ln x - \left[\ln\left(\sqrt{1+v^2} + v\right) - \frac{\sqrt{1+v^2}}{v}\right] = C$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln x - \left[\ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\right) - \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}\right] = C$$

$$\ln x - \left[\ln\left(\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}\right) - \frac{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}{\frac{y}{x}}\right] = C$$

$$\ln x - \left[\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}\right) - \frac{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}}{\frac{y}{x}}\right] = C$$

$$\ln x - \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x}\right) + \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}}{\frac{y}{x}} = C$$

$$\ln x - \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right) + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = C$$

$$-\left[\ln x - \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right) + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = C\right]$$

$$-\ln x+\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right)-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=-C$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right)-\ln x-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=-C$$

$$\ln\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}}{x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}-C$$

$$\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}-C$$

$$\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}-C$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x^2}=e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}-C}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x^2}=e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}e^{-C}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x^2}=e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}K;\quad K=e^{-C}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+y=Kx^2e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Kx^2e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}$$

Entonces, $\boldsymbol{y+\sqrt{x^2+y^2}=Kx^2e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}}$ es solución general de la ED.

3.5 Ecuaciones diferenciales ordinarias exactas

3.5.1 Diferencial total

Si $f: R^2 \to R$, es una función diferenciable en $(x, y) \in R^2$, entonces la diferencial total de f es la función df, cuyo valor está dado por: $df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$.

• Calcular la diferencial total de las siguientes funciones de dos variables reales.

1. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

Solución:

$f(x, y) = y^5 - 3xy$

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^5 - 3xy)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^5) - \frac{\partial}{\partial x}(3xy)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^5) - 3y\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 - 3y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -3y$

$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^5 - 3xy)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^5) - \frac{\partial}{\partial y}(3xy)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^5) - 3x\frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 5y^4 - 3x$

Por lo tanto, la diferencial total es $df(x, y) = -3ydx + (5y^4 - 3x)dy$.

2. $f(x, y) = x^y$

Solución:

$f(x, y) = x^y$

$\ln[f(x, y)] = \ln x^y$

$\ln[f(x, y)] = y \ln x$

$\frac{\partial}{\partial x}\ln[f(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}(y\ln x)$

$\frac{\partial}{\partial y}\ln[f(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}(y\ln x)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial x}(\ln x)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f(x,y) \cdot \frac{y}{x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x^y \cdot \frac{y}{x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{y-1}$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln x \frac{\partial}{\partial}(y)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln x$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x,y) \cdot \ln x$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \ln x$

Por lo tanto, la diferencial total es $df(x,y) = yx^{y-1}dx + x^y \ln x \, dy$.

3. $f(x,y) = e^{xy} \sin y$

Solución:

$f(x,y) = e^{xy} \sin y$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} \sin y)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sin y \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (\sin y) y e^{xy}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y e^{xy} \sin y$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} \sin y)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin y \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y}(\sin y)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (\sin y) x e^{xy} + e^{xy} \cos y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x e^{xy} \sin y + e^{xy} \cos y$

Por lo tanto, la diferencial total es $df(x,y) = y e^{xy} \sin y \, dx + (x e^{xy} \sin y + e^{xy} \cos y) dy$.

4. $f(x,y) = (x^2 + y^2) e^{y^2 - x^2}$

Solución:

$f(x,y) = (x^2 + y^2) e^{y^2 - x^2}$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2 + y^2) e^{y^2 - x^2}\right]$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{y^2-x^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y^2-x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{y^2-x^2}(2x) + (x^2+y^2)e^{y^2-x^2}\frac{\partial}{\partial x}(y^2-x^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{y^2-x^2}(2x) + (x^2+y^2)e^{y^2-x^2}(-2x)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xe^{y^2-x^2} - 2x(x^2+y^2)e^{y^2-x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2)e^{y^2-x^2}\right]$$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{y^2-x^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y^2-x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{y^2-x^2}(2y) + (x^2+y^2)e^{y^2-x^2}\frac{\partial}{\partial y}(y^2-x^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{y^2-x^2}(2y) + (x^2+y^2)e^{y^2-x^2}(2y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2ye^{y^2-x^2} + 2y(x^2+y^2)e^{y^2-x^2}$$

Por lo tanto, la diferencial total es:

$$df(x,y) = \left[2xe^{y^2-x^2} - 2x(x^2+y^2)e^{y^2-x^2}\right]dx + \left[2ye^{y^2-x^2} + 2y(x^2+y^2)e^{y^2-x^2}\right]dy.$$

5. $f(x,y) = x^2 \ln y + \sqrt{y}\ln x \ \ ; \ \ x > 0, y > 0$

Solución:

$$f(x,y) = x^2 \ln y + \sqrt{y}\ln x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\ln y + \sqrt{y}\ln x\right)$$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\ln y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y}\ln x\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln y\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \sqrt{y}\frac{\partial}{\partial x}(\ln x)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln y\,(2x) + \sqrt{y}\cdot\frac{1}{x}$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \ln y + \frac{1}{x}\sqrt{y}$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \ln y + \sqrt{y} \ln x\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \ln y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y} \ln x\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y}(\ln y) + \ln x \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y}\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{y} + \ln x \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + \ln x \left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + \ln x \left(\frac{1}{2} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + \frac{\sqrt{y} \ln x}{2y}$

Por lo tanto, la diferencial total es $df(x,y) = \left(2x \ln y + \frac{1}{x}\sqrt{y}\right) dx + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{\sqrt{y} \ln x}{2y}\right) dy$.

6. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \sin 3x \cos y \quad ; \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1$

Solución:

$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \sin 3x \cos y$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^2} \sin 3x \cos y\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos y \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^2} \sin 3x\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos y \left[\sin 3x \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^2}\right) + e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial x}(\sin 3x)\right]$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos y \left[\sin 3x \, e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 - y^2)\right] + e^{-x^2-y^2} \cos 3x \frac{\partial}{\partial x}(3x)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos y \left[\sin 3x \, e^{-x^2-y^2}(-2x) + e^{-x^2-y^2} \cos 3x \, (3)\right]$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos y \left[-2x \sin 3x\, e^{-x^2-y^2} + 3e^{-x^2-y^2} \cos 3x\right]$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-y^2} \sin 3x \cos y\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin 3x \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-y^2} \cos y\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin 3x \left[\cos y \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-y^2}\right) + e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial y}(\cos y)\right]$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin 3x \left[\cos y\, e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 - y^2) + e^{-x^2-y^2}(-\sin y)\right]$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin 3x \left[\cos y\; e^{-x^2-y^2}(-2y) - \sin y\, e^{-x^2-y^2}\right]$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin 3x \left[-2y \cos y\; e^{-x^2-y^2} - \sin y\, e^{-x^2-y^2}\right]$

Por lo tanto, la diferencial total es:

$df(x,y) = \cos y \left[-2x \sin 3x\, e^{-x^2-y^2} + 3e^{-x^2-y^2} \cos 3x\right]dx + \sin 3x \left[-2y \cos y\; e^{-x^2-y^2} - \sin y\, e^{-x^2-y^2}\right]dy$.

7. $f(x,y) = y^{\sqrt{x}}$

Solución:

$f(x,y) = y^{\sqrt{x}}$

$\ln[f(x,y)] = \ln y^{\sqrt{x}}$

$\ln[f(x,y)] = \sqrt{x} \ln y$

$\frac{\partial}{\partial x}\ln[f(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x} \ln y\right)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln y \left(\frac{\partial}{\partial x} x^{\frac{1}{2}}\right)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln y \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln y$

$\frac{\partial}{\partial y}\ln[f(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x} \ln y\right)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sqrt{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln y\right)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sqrt{x} \left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{1}{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f(x,y)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln y$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x,y)\frac{\sqrt{x}}{y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln y$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{y} \cdot y^{\sqrt{x}}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\sqrt{x}}\ln y$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sqrt{x}y^{\sqrt{x}-1}$

Por lo tanto, la diferencial total es $df(x,y) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\sqrt{x}}\ln y\, dx + \sqrt{x}y^{\sqrt{x}-1}dy.$

8. $f(x,y) = x^2e^{-x^2-y^2}$

Solución:

$f(x,y) = x^2e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2e^{-x^2-y^2}\right)$ $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2e^{-x^2-y^2}\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^2}\right)$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-y^2}\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}(2x) + x^2\left(-2xe^{-x^2-y^2}\right)$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2\left(-2ye^{-x^2-y^2}\right)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xe^{-x^2-y^2} - 2x^3e^{-x^2-y^2}$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2x^2ye^{-x^2-y^2}$

Por lo tanto, la diferencial total es:

$df(x,y) = \left(2xe^{-x^2-y^2} - 2x^3e^{-x^2-y^2}\right)dx - 2x^2ye^{-x^2-y^2}dy.$

9. $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Solución:

$f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{(1-xy)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)-(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(1-xy)}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\frac{(1-xy)^2+(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{(1-xy)\cdot 1-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(1-xy)^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2y^2+x^2+y^2}(1+y^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2+x^2+x^2y^2}(1+y^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2+x^2(1+y^2)}(1+y^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}(1+y^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{(1-xy)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)-(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(1-xy)}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\frac{(1-xy)^2+(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{(1-xy)\cdot 1-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(1-xy)^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2y^2+x^2+y^2}(1+x^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2+x^2+x^2y^2}(1+x^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2+x^2(1+y^2)}(1+x^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}(1+x^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$$

Por lo tanto, la diferencial total es $df(x,y) = \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{1+y^2}dy$.

10. $f(x,y) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$

Solución:

$$f(x,y) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)$$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^3y-xy^3)-(x^3y-xy^3)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)$$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^3y-xy^3)-(x^3y-xy^3)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)(x^3-3xy^2)-(x^3y-xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^5-3x^3y^2+x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

Por lo tanto, la diferencial total es $df(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}dy$.

3.5.2 Soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias exactas

• Determine si la ecuación dada es exacta. Si la es, resuélvala. Además, presente la solución particular sujeta a la condición inicial que se indica.

1. $\left(2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}\right)dx = \left(x - \sin^2 x - 4xye^{xy^2}\right)dy$

Solución:

Primero debemos expresar la ED en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$\left(2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}\right)dx = \left(x - \sin^2 x - 4xye^{xy^2}\right)dy$

$\left(2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}\right)dx - \left(x - \sin^2 x - 4xye^{xy^2}\right)dy = 0$

$\left(2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}\right)dx + \left(\sin^2 x - x + 4xye^{xy^2}\right)dy = 0$

Sea:

$M(x,y) = 2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2y\sin x\cos x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2y^2e^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\sin x\cos x\frac{\partial}{\partial y}(y) - 1 + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2e^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\sin x\cos x - 1 + 2\left(2ye^{xy^2} + y^2e^{xy^2}\cdot 2xy\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\sin x\cos x - 1 + 2\left(2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\sin x\cos x - 1 + 4ye^{xy^2} + 4xy^3e^{xy^2}}$

$N(x,y) = \sin^2 x - x + 4xye^{xy^2}$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x - x + 4xye^{xy^2}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2 x) - \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(4xye^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin x\cos x - 1 + 4y\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin x\cos x - 1 + 4y\left(e^{xy^2} + xe^{xy^2}\cdot y^2\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin x\cos x - 1 + 4ye^{xy^2} + 4xy^3e^{xy^2}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta.

Por lo tanto, debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sin^2 x - x + 4xye^{xy^2}$

Como tenemos dos caminos para llegar a $F(x,y)$, debemos elegir cualesquiera de ella por lo general aquel de estructura más simple.

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sin^2 x - x + 4xye^{xy^2}$

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy = \int\left(\sin^2 x - x + 4xye^{xy^2}\right)dy + h(x)$ Integrando con respecto a y.

$F(x,y) = \int \sin^2 x\, dy - \int x\, dy + \int 4xye^{xy^2} dy + h(x)$ Suma y diferencia de integrales.

$F(x,y) = y\sin^2 x - xy + 2\int 2xye^{xy^2} dy + h(x)$

$F(x,y) = y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} + h(x)$

Ahora derivamos parcialmente $F(x,y)$ con respecto a x.

$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} + h(x)\right)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y\sin^2 x) - \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2e^{xy^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}(\sin^2 x) - y\frac{\partial}{\partial x}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy^2}\right) + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y(2\sin x\cos x) - y + 2\left(y^2 e^{xy^2}\right) + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2y\sin x\cos x - y + 2y^2 e^{xy^2} + h'(x)$

Sabemos que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2y\sin x\cos x - y + 2y^2 e^{xy^2}$. Por el principio de sustitución.

$2y\sin x\cos x - y + 2y^2 e^{xy^2} = 2y\sin x\cos x - y + 2y^2 e^{xy^2} + h'(x)$

$0 = h'(x)$

$h'(x) = 0$

Integrando se obtiene:

$h(x) = C$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} + C$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} + C = K$

$y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} = C - K$

$y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} = K_1$, donde $K_1 = C - K$.

Por lo tanto, $\boldsymbol{y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} = K_1}$ es solución general de la ED.

2. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0$

Solución:

La ecuación está en su forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$$\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0$$

Sea:

$$M(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}$$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial}{\partial y}(y) + 2x\frac{\partial}{\partial y}(y) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x}}$$

$$N(x,y) = \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x$$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(\ln x)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x}}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} \right) dx + g(y)$$ Integrando con respecto a x.

$$F(x,y) = \int \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int 2xy\, dx - \int \frac{y}{x} dx + g(y)$$

$$F(x,y) = y \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + y \int 2x dx - y \int \frac{1}{x} dx + g(y)$$

$$F(x,y) = y \int \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx + x^2 y - y \ln x + g(y)$$

$$F(x,y) = y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - y \ln x + g(y)$$

Ahora derivamos parcialmente $F(x,y)$ con respecto a y.

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - y \ln x + g(y) \right)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y\sqrt{1+x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) - \frac{\partial}{\partial y} (y \ln x) + \frac{\partial}{\partial y} [g(y)]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} \frac{\partial}{\partial y}(y) + x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y) - \ln x \frac{\partial}{\partial y}(y) + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x + g'(y)$$

Sabemos que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x$. Por el principio de sustitución.

$$\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x = \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x + g'(y)$$

$$0 = g'(y)$$

$$g'(y) = 0$$

Integrando se obtiene:

$$g(y) = C$$

La solución de la ED es:

$$F(x,y) = y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - y \ln x + C$$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x+C=K$

$y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=K-C$

$y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=K_1\ ;\ K_1=K-C$

Por lo tanto, $\boldsymbol{y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=K_1}$ es solución general de la ED.

3. $y'=\frac{2e^{xy}\sin 2x-ye^{xy}\cos 2x-2x}{xe^{xy}\cos 2x-3}$

Solución:

Debemos transformar la ED en la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$y'=\frac{2e^{xy}\sin 2x-ye^{xy}\cos 2x-2x}{xe^{xy}\cos 2x-3}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^{xy}\sin 2x-ye^{xy}\cos 2x-2x}{xe^{xy}\cos 2x-3}$

$(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=(2e^{xy}\sin 2x-ye^{xy}\cos 2x-2x)dx$

$-(2e^{xy}\sin 2x-ye^{xy}\cos 2x-2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$

$(-2e^{xy}\sin 2x+ye^{xy}\cos 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$

$(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$

Sea:

$M(x,y)=ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}\cos 2x)-\frac{\partial}{\partial y}(2e^{xy}\sin 2x)+\frac{\partial}{\partial y}(2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos 2x\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})-2\sin 2x\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})+0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos 2x\,(e^{xy}+ye^{xy}x)-2\sin 2x\,(e^{xy}x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos 2x\,(e^{xy} + xye^{xy}) - 2xe^{xy}\sin 2x$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = (e^{xy} + xye^{xy})\cos 2x - 2xe^{xy}\sin 2x}$

$N(x,y) = xe^{xy}\cos 2x - 3$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}\cos 2x - 3)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}\cos 2x) - \frac{\partial}{\partial x}(3)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos 2x\,\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) + xe^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(\cos 2x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos 2x\,(e^{xy} + xe^{xy}y) + xe^{xy}(-2\sin 2x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos 2x\,(e^{xy} + xye^{xy}) - 2xe^{xy}\sin 2x$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (e^{xy} + xye^{xy})\cos 2x - 2xe^{xy}\sin 2x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta.

Por lo tanto, debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = xe^{xy}\cos 2x - 3$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = xe^{xy}\cos 2x - 3$

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = \int (xe^{xy}\cos 2x - 3)dy + h(x)$ Integrando con respecto a y.

$F(x,y) = \int xe^{xy}\cos 2x\,dy - \int 3\,dy + h(x)$ Suma y diferencia de integrales.

$F(x,y) = x\cos 2x\int e^{xy}dy - 3\int dy + h(x)$

$F(x,y) = x\cos 2x\left(\frac{e^{xy}}{x}\right) - 3y + h(x)$ Simplificando x.

$F(x,y) = \cos 2x\,e^{xy} - 3y + h(x)$

$F(x, y) = e^{xy} \cos 2x - 3y + h(x)$

Ahora derivamos parcialmente $F(x, y)$ con respecto a x.

$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} \cos 2x - 3y + h(x))$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} \cos 2x) - \frac{\partial}{\partial x}(3y) + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \cos 2x \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) + e^{xy} \frac{\partial}{\partial x}(\cos 2x) - 0 + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \cos 2x\,(ye^{xy}) + e^{xy}(-2 \sin 2x) + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + h'(x)$

Sabemos que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x$. Por el principio de sustitución.

$\cancel{ye^{xy} \cos 2x} - \cancel{2e^{xy} \sin 2x} + 2x = \cancel{ye^{xy} \cos 2x} - \cancel{2e^{xy} \sin 2x} + h'(x)$

$2x = h'(x)$

$h'(x) = 2x$

Integrando se obtiene:

$h(x) = x^2 + C$

La solución de la ED es:

$F(x, y) = e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 + C$

$F(x, y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 + C = K$

$e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 = K - C$

$e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = K_1; \;\; K_1 = K - C$

Entonces, $\boldsymbol{e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = K_1}$ es solución general de la ED.

4. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\left(\frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)(ydx-xdy)=0$

Solución:

Transformamos la ED en la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\left(\frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)(ydx-xdy)=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dx+\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dy+y\left(\frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)dx-x\left(\frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dx+\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dy+\left(\frac{y}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{ye^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)dx-\left(\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dx+\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dy+\left(\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)dx-\left(\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)dy=0$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)dx+\left[\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}-\left(\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)\right]dy=0$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)dx+\left[\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right]dy=0$$

Sea:

$$M(x,y)=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)$$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{\frac{1}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]+\frac{y\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)-e^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial y}(y)}{y^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial y}\left([(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \frac{y\left(-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)-e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial y}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]\right\} + \left[-\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial y}(y^2-x^2)\right] + \frac{-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}[2y(1-x^2-y^2)-2y(x^2+y^2)]\right\} + \left[-\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}(2y)\right] + \frac{\frac{-xe^{\frac{x}{y}}-ye^{\frac{x}{y}}}{y}}{y^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}[2y-2x^2y-2y^3-2x^2y-2y^3]\right\} + \left[-y(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right] + \frac{-xe^{\frac{x}{y}}-ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}[2y-4x^2y-4y^3]\right\} + \left[-y(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right] - \frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\left\{-[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}[y-2x^2y-2y^3]\right\} - \frac{y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{-x(y-2x^2y-2y^3)}{[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y+2xy^3-xy}{[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}}$$

$$N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)$$

Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{\frac{x}{y}}\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}\left\{[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}}\right\} - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left[x(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{y^2}\left(e^{\frac{x}{y}} + xe^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]\right\} - \frac{1}{y}\left[(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)(-2x)\right] - \frac{1}{y^2}\left(\frac{ye^{\frac{x}{y}}+xe^{\frac{x}{y}}}{y}\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]\right\} - \frac{1}{y}\left[(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2\left((y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\right] - \frac{1}{y^2}\left(\frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y}\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}[2x(1-x^2-y^2)-2x(x^2+y^2)]\right\} - \frac{1}{y}\left[(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] - \frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=y\left\{-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}[2x-2x^3-2xy^2-2x^2-2xy^2]\right\}-\frac{1}{y}\left[\frac{(y^2-x^2)+x^2}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]-\frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=y\left\{-[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}[x-2x^3-2xy^2]\right\}-\frac{1}{y}\left[\frac{y^2-x^2+x^2}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]-\frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{-y(x-2x^3-2xy^2)}{[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{y}\left[\frac{y^2}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]-\frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{2x^3y+2xy^3-xy}{[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)]^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{xe^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}}{y^3}}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

Para hallar $F(x,y)$, elegimos $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$$

$$\int\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx=\int\left[\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}\right]dx+g(y)$$

Integrando con respecto a x.

$$F(x,y)=\int\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx+\int\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}dx+g(y)$$

Suma de integrales.

$$F(x,y)=\int\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx+e^{\frac{x}{y}}+g(y)$$

Sea:

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dx \qquad R=\int\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx$$

$$F(x,y)=I+R+e^{\frac{x}{y}}+g(y)$$

Calculamos cada integral por separado.

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}dx$$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}dx$$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}dx$$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}dx$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta}}\cos\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{1}{\cos\vartheta}\cos\theta\, d\theta$$

$$I = \int d\theta$$

$$I = \theta + C_1$$

$$I = \sin^{-1} u + C_1$$

Escribiendo con la variable original.

$$I = \sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2} + C_1$$

Sustitución.

$$u = \sqrt{x^2+y^2}$$

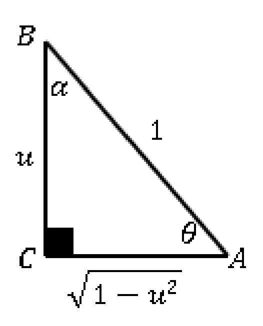
$$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

Resolviendo por sustitución trigonométrica.



$$\sin\theta = u \quad \rightarrow \vartheta = \sin^{-1} u$$

$$u = \sin\theta \quad \rightarrow u^2 = \sin^2\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}u = \frac{d}{d\theta}\sin\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$$

$$du = \cos\theta\, d\theta$$

Calculando la segunda integral.

$R = \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx$

$R = \int \frac{1}{\sqrt{y^2\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)}} dx$

$R = \int \frac{1}{\sqrt{y^2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} dx$

$R = \int \frac{1}{y \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} dx$

$R = \int \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} dx$

$R = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} dx$

$R = \int \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} dz$

$R = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \cos \alpha \, d\alpha$

$R = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} \cos \alpha \, d\alpha$

$R = \int \frac{1}{\cos \alpha} \cos \alpha \, d\alpha$

$R = \int d\alpha$

$R = \alpha + C_2$

$R = \sin^{-1} z + C_2$

Escribiendo con la variable original.

$R = \sin^{-1} \frac{x}{y} + C_2$

Resolviendo por sustitución.

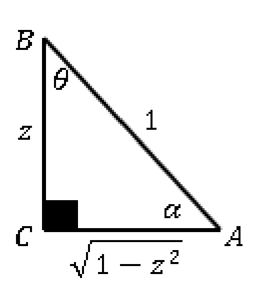
$z = \frac{x}{y}$

$\frac{d}{dx} z = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}$

$dz = \frac{1}{y} dx$

Resolviendo por sustitución trigonométrica.



$\sin \alpha = z \quad \rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1} z$

$z = \sin \alpha \quad \rightarrow \quad z^2 = \sin^2 \alpha$

$\frac{d}{d\alpha} z = \frac{d}{d\alpha} \sin \alpha$

$\frac{dz}{d\alpha} = \cos \alpha$

$dz = \cos \alpha \, d\alpha$

$F(x, y) = \sin^{-1} \sqrt{x^2 + y^2} + C_1 + \sin^{-1} \frac{x}{y} + C_2 + e^{\frac{x}{y}} + g(y)$

Ahora derivamos parcialmente $F(x, y)$ con respecto a y.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2} + C_1 + \sin^{-1}\frac{x}{y} + C_2 + e^{\frac{x}{y}} + g(y)\right]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(C_1) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin^{-1}\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(C_2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x}{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}[g(y)]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 0 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + 0 - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2}}} \cdot -\frac{x}{y^2} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x}{\frac{y^2\sqrt{y^2-x^2}}{y}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} + g'(y)$$

Sabemos que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$. Por el principio de sustitución.

$$\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} + g'(y)$$

$0 = g'(y)$

$g'(y) = 0$

Integrando se obtiene:

$g(y) = C$

Luego, la solución de la ED es:

$$F(x,y) = \sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2} + C_1 + \sin^{-1}\frac{x}{y} + C_2 + e^{\frac{x}{y}} + C$$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$$\sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2} + C_1 + \sin^{-1}\frac{x}{y} + C_2 + e^{\frac{x}{y}} + C = K$$

$\sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2}+\sin^{-1}\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}}=K-C-C_1-C_2$

$\boldsymbol{\sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2}+\sin^{-1}\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}}=K_1}$, donde $K_1=K-C-C_1-C_2$

5. Halle el valor de A tal que la ecuación diferencial sea exacta y resuélvala.

$(6xy^3+\cos y)dx+(kx^2y^2-x\sin y)dy=0$

Solución:

$(6xy^3+\cos y)dx+(kx^2y^2-x\sin y)dy=0$

Sea:

$M(x,y)=6xy^3+\cos y$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(6xy^3+\cos y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(6xy^3)+\frac{\partial}{\partial y}(\cos y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=6x\frac{\partial}{\partial y}(y^3)-\sin y$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=6x(3y^2)-\sin y$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=18xy^2-\sin y}$

$N(x,y)=kx^2y^2-x\sin y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(kx^2y^2-x\sin y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(kx^2y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(x\sin y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=ky^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\sin y\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=ky^2(2x)-\sin y\,(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2kxy^2-\sin y}$

Para que la ED sea exacta se debe cumplir que: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

$18xy^2 - \sin y = 2kxy^2 - \sin y$

$18xy^2 = 2kxy^2$

$\frac{18xy^2}{2xy^2} = k$

$9 = k$

$k = 9$

En efecto, para que la ED sea exacta k debe ser 9.

Luego tenemos la ED a resolver: $(6xy^3 + \cos y)dx + (9x^2y^2 - x\sin y)dy = 0$

Entonces debe existir $F(x, y)$ tal que

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$ $\qquad$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 6xy^3 + \cos y$ $\qquad$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 9x^2y^2 - x\sin y$

Para obtener $F(x, y)$ integramos $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int (6xy^3 + \cos y)\, dx + g(y)$ $\qquad$ Integrando con respecto a x.

$F(x, y) = 6y^3 \int x dx + \cos y \int dx + g(y)$ $\qquad$ Suma de integrales.

$F(x, y) = 6y^3 \left(\frac{x^2}{2}\right) + \cos y\,(x) + g(y)$ $\qquad$ Simplificando.

$F(x, y) = 3x^2y^3 + x\cos y + g(y)$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[3x^2y^3 + x\cos y + g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + x\frac{\partial}{\partial y}(\cos y) + \frac{\partial}{\partial y}[g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x^2(3y^2) + x(-\sin y) + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 9x^2y^2 - x\sin y + g'(y)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 9x^2y^2 - x\sin y$. Por el principio de sustitución.

$9x^2y^2 - x\sin y = 9x^2y^2 - x\sin y + g'(y)$

$0 = g'(y)$

$g'(y) = 0$

Integrando se obtiene:

$g(y) = C$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = 3x^2y^3 + x\cos y + C$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$3x^2y^3 + x\cos y + C = K$

$3x^2y^3 + x\cos y = K - C$

$\boldsymbol{3x^2y^3 + x\cos y = K_1}$; $K_1 = K - C$

6. $\left(\frac{3y^2-x^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2y^4} = 0$; $y(1) = 1$

Solución:

Primero transformamos la ED en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$\left(\frac{3y^2-x^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2y^4} = 0$

$\left(\frac{3y^2-x^2}{y^5}\right)dy + \frac{x}{2y^4}dx = 0$

$\frac{x}{2y^4}dx + \left(\frac{3y^2-x^2}{y^5}\right)dy = 0$

Sea:

$M(x,y) = \frac{x}{2y^4}$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2y^4}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial y}(y^{-4})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{2}(-4y^{-5})$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2xy^{-5}}$

$N(x,y) = \left(\frac{3y^2-x^2}{y^5}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y^2-x^2}{y^5}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y^2}{y^5} - \frac{x^2}{y^5}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y^2}{y^5}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y^5}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 - \frac{1}{y^5}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x}{y^5}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2xy^{-5}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debes existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{2y^4}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{3y^2-x^2}{y^5}$

Luego, Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int \frac{x}{2y^4} dx + g(y)$ Integrando con respecto a x.

$F(x, y) = \frac{1}{2y^4} \int x dx + g(y)$

$F(x, y) = \frac{1}{2y^4} \left(\frac{x^2}{2}\right) + g(y)$ Simplificando.

$F(x, y) = \frac{x^2}{4y^4} + g(y)$

Ahora derivamos parcialmente $F(x, y)$ con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x^2}{4y^4} + g(y)\right]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{4y^4}\right) + \frac{\partial}{\partial y} [g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{4} \frac{\partial}{\partial y} (y^{-4}) + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{4} (-4y^{-5}) + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^5} + g'(y)$

Sabemos que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{3y^2 - x^2}{y^5}$. Por el principio de sustitución.

$\frac{3y^2 - x^2}{y^5} = -\frac{x^2}{y^5} + g'(y)$

$\frac{3y^2}{y^5} - \frac{x^2}{y^5} = -\frac{x^2}{y^5} + g'(y)$

$\frac{3}{y^3} = g'(y)$

$g'(y) = \frac{3}{y^3}$

$g'(y) = 3y^{-3}$

Integrando, se obtiene:

$g(y) = -\frac{3}{2}y^{-2} + C$

La solución de la ED es:

$F(x, y) = \frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2}y^{-2} + C$

$F(x, y) = \frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2y^2} + C$

Luego, $F(x, y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$\frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2y^2} + C = K$

$\frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2y^2} = K - C$

$\frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2y^2} = K_1$; $K_1 = K - c$

Ahora calculamos el valor de K_1 para $x = 1, y = 1$.

$\frac{(1)^2}{4(1)^4} - \frac{3}{2(1)^2} = K_1$

$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = K_1$

$\frac{1-6}{4} = K_1$

$-\frac{5}{4} = K_1$

$K_1 = -\frac{5}{4}$

Por lo tanto, la solución particular de la ED es:

$\boldsymbol{\frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2y^2} = -\frac{5}{4}}$

7. $(2x\sin y + ye^{xy})dx + (x^2\cos y + xe^{xy})dy = 0\,;\quad y(-1) = 0$

Solución:

La ED está en la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Sea:

$M(x,y) = 2x\sin y + ye^{xy}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x\sin y + ye^{xy})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x\sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x\frac{\partial}{\partial y}(\sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x(\cos y) + e^{xy} + y\cdot xe^{xy}$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x\cos y + e^{xy} + xye^{xy}}$

$N(x,y) = x^2\cos y + xe^{xy}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y + xe^{xy})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y) + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y\,(2x) + e^{xy} + x\cdot ye^{xy}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + e^{xy} + xye^{xy}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta.

Por lo tanto, debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x\sin y + ye^{xy}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2\cos y + xe^{xy}$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ para obtener $F(x,y)$.

$\int\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = \int(x^2\cos y + xe^{xy})dy + h(x)$ Integrando con respecto a y.

$F(x,y) = \int x^2\cos y\,dy + \int xe^{xy}\,dy + h(x)$ Suma de integrales.

$F(x,y) = x^2\int\cos y\,dy + \int xe^{xy}\,dy + h(x)$

$F(x,y) = x^2\sin y + e^{xy} + h(x)$

Ahora derivamos parcialmente $F(x,y)$ con respecto a x.

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin y + e^{xy} + h(x))$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin y) + \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \sin y \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + ye^{xy} + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \sin y\,(2x) + ye^{xy} + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x \sin y + ye^{xy} + h'(x)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x \sin y + ye^{xy}$. Por el principio de sustitución.

$2x \sin y + ye^{xy} + h'(x) = 2x \sin y + ye^{xy}$

$h'(x) = 0$

Integrando, se obtiene:

$h(x) = C$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = x^2 \sin y + e^{xy} + C$

Luego, $F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$x^2 \sin y + e^{xy} + C = K$

$x^2 \sin y + e^{xy} = K - C$

$x^2 \sin y + e^{xy} = K_1$; donde $K_1 = K - C$

Determinemos el valor de K_1 para $x = -1, y = 0$.

$(-1)^2 \sin 0 + e^{(-1)(0)} = K_1$

$0 + e^0 = K_1$

$0 + 1 = K_1$

$1 = K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = 1$

La solución particular de la ED es:

$\boldsymbol{x^2 \sin y + e^{xy} = 1}$

8. $(2y\cos x + \cos 2x - \cos^2 x)y' = y\sin 2x + y^2 \sin x\ ;\quad y(0) = 3$

Solución:

Transformamos la ED en la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$(2y\cos x + \cos 2x - \cos^2 x)y' = y\sin 2x + y^2 \sin x$

$(2y\cos x + \cos 2x - \cos^2 x)\frac{dy}{dx} = y\sin 2x + y^2 \sin x$

$(2y\cos x + \cos 2x - \cos^2 x)dy = (y\sin 2x + y^2 \sin x)dx$

$0 = (y\sin 2x + y^2 \sin x)dx - (2y\cos x + \cos 2x - \cos^2 x)dy$

$(y\sin 2x + y^2 \sin x)dx - (2y\cos x + \cos 2x - \cos^2 x)dy = 0$

Sea:

$M(x,y) = y\sin 2x + y^2 \sin x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y\sin 2x + y^2 \sin x)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y\sin 2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \sin x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin 2x \frac{\partial}{\partial y}(y) + \sin x \frac{\partial}{\partial y}(y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin 2x\,(1) + \sin x\,(2y)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin 2x + 2y\sin x}$

$N(x,y) = -(2y\cos x + \cos 2x - \cos^2 x)$

$N(x,y) = \cos^2 x - \cos 2x - 2y\cos x$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos^2 x - \cos 2x - 2y\cos x)$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos^2 x) - \frac{\partial}{\partial x}(\cos 2x) - \frac{\partial}{\partial x}(2y\cos x)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\cos x\,(-\sin x) - (-2\sin 2x) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(\cos x)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2\sin x\cos x + 2\sin 2x - 2y(-\sin x)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2\sin x\cos x + 2\sin 2x + 2y\sin x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\sin 2x + 2\sin 2x + 2y\sin x$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sin 2x + 2y\sin x}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta.

Por lo tanto, debe existir $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\sin 2x + y^2\sin x \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \cos^2 x - \cos 2x - 2y\cos x$$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ para obtener $F(x,y)$.

$$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = \int(\cos^2 x - \cos 2x - 2y\cos x)dy + h(x)$$ Integrando con respecto a y.

$$F(x,y) = \int \cos^2 x\,dy - \int \cos 2x\,dy - \int 2y\cos x\,dy + h(x)$$ Suma y diferencia de integrales.

$$F(x,y) = \cos^2 x\int dy - \cos 2x\int dy - \cos x\int 2y\,dy + h(x)$$

$$F(x,y) = \cos^2 x\,(y) - \cos 2x\,(y) - \cos x\,(y^2) + h(x)$$

$$F(x,y) = y\cos^2 x - y\cos 2x - y^2\cos x + h(x)$$

Ahora derivamos parcialmente $F(x,y)$ con respecto a x.

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y\cos^2 x - y\cos 2x - y^2\cos x + h(x))$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y\cos^2 x) - \frac{\partial}{\partial x}(y\cos 2x) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2\cos x) + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}(\cos^2 x) - y\frac{\partial}{\partial x}(\cos 2x) - y^2\frac{\partial}{\partial x}(\cos x) + h'(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y(-2\cos x \sin x) - y(-2\sin 2x) - y^2(-\sin x) + h'(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -y \cdot 2\sin x \cos x + 2y\sin 2x + y^2 \sin x + h'(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -y\sin 2x + 2y\sin 2x + y^2\sin x + h'(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\sin 2x + y^2\sin x + h'(x)$$

Como sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\sin 2x + y^2\sin x$. Por el principio de sustitución.

$$y\sin 2x + y^2\sin x + h'(x) = y\sin 2x + y^2\sin x$$

$$h'(x) = 0$$

Integrando, se obtiene:

$$h(x) = C$$

La solución de la ED es:

$$F(x,y) = y\cos^2 x - y\cos 2x - y^2\cos x + C$$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$$y\cos^2 x - y\cos 2x - y^2\cos x + C = K$$

$$y\cos^2 x - y\cos 2x - y^2\cos x = K - C$$

$y\cos^2 x - y\cos 2x - y^2\cos x = K_1$, donde $K_1 = K - C$.

$$y(\cos^2 x - \cos 2x) - y^2\cos x = K_1$$

$$y[\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)] - y^2\cos x = K_1$$

$$y[\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x] - y^2\cos x = K_1$$

$$y(\sin^2 x) - y^2\cos x = K_1$$

$$y\sin^2 x - y^2\cos x = K_1$$

Calculamos el valor de K_1 para $x = 0, y = 3$.

$3\sin^2 0 - (3)^2 \cos 0 = K_1$

$0 - 9(1) = K_1$

$-9 = K_1$

$K_1 = -9$

Entonces la solución particular es:

$y \sin^2 x - y^2 \cos x = -9$

$\boldsymbol{y \sin^2 x - y^2 \cos x + 9 = 0}$

9. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$

Solución:

Transformamos la ED de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)\frac{dy}{dx} = 0$

$dx\left(x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)\frac{dy}{dx} = 0\right)$

$x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)\frac{dy}{dx}dx = 0 \cdot dx$

$x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$

Sea:

$M(x,y) = x(2x^2 + y^2)$

$M(x,y) = 2x^3 + xy^2$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + xy^2)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 2xy$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xy}$

$N(x,y) = y(x^2 + 2y^2)$

$N(x,y) = x^2y + 2y^3$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2y^3)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(2y^3)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x^3 + xy^2$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2y + 2y^3$

Para obtener $F(x,y)$ integramos $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx = \int(2x^3 + xy^2)dx + g(y)$

$F(x,y) = 2\int x^3\,dx + y^2\int xdx + g(y)$

$$F(x,y) = 2\cdot\frac{x^4}{4} + y^2\cdot\frac{x^2}{2} + g(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + g(y)$$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + g(y)\right)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g(y)\right)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0 + \frac{2x^2y}{2} + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2y + g'(y)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2y + 2y^3$. Por el principio de sustitución.

$x^2y + 2y^3 = x^2y + g'(y)$

$x^2y + 2y^3 - x^2y = g'(y)$

$g'(y) = 2y^3$

Integrando, se obtiene:

$g(y) = \frac{y^4}{2} + C$

La solución de la ED es:

$$F(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + C$$

Luego, $F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$$\frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + C = K$$

$$\frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} = K - C$$

$$2\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} = K - C\right)$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 2(K - C)$$

$$\boldsymbol{x^4 + x^2y^2 + y^4 = k_1}; \quad k_1 = 2(K - C)$$

10. $\frac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\left(\frac{x}{\cos^2(xy)}+\sin y\right)dy=0$

Solución:

Sea:

$M(x,y)=\frac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2 xy}$

$M(x,y)=\frac{y}{\cos^2(xy)}+\frac{\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}$

$M(x,y)=y\sec^2(xy)+\sin x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(y\sec^2(xy)+\sin x)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y\sec^2(xy))+\frac{\partial}{\partial y}(\sin x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\sec^2(xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)+y\frac{\partial}{\partial y}(\sec^2(xy))+0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\sec^2(xy)\,(1)+y\big(2\sec(xy)\sec(xy)\tan(xy)\,(x)\big)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\sec^2(xy)+2xy\sec^2(xy)\tan(xy)}$

$N(x,y)=\frac{x}{\cos^2(xy)}+\sin y$

$N(x,y)=x\sec^2(xy)+\sin y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x\sec^2(xy)+\sin y)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\sec^2(xy))+\frac{\partial}{\partial x}(\sin y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\sec^2(xy)\frac{\partial}{\partial x}(x)+x\,\frac{\partial}{\partial x}(\sec^2(xy))+0$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\sec^2(xy)\,(1)+x\,\big(2\sec(xy)\sec(xy)\tan(xy)\,(y)\big)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\sec^2(xy)+2xy\sec^2(xy)\tan(xy)}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\sec^2(xy) + \sin x$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x\sec^2(xy) + \sin y$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ para obtener $F(x,y)$.

$$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx = \int (y\sec^2(xy) + \sin x)\,dx + g(y)$$

$$F(x,y) = \int y\sec^2(xy)\,dx + \int \sin x\,dx + g(y)$$

$$F(x,y) = \tan(xy) - \cos x + g(y)$$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\tan(xy) - \cos x + g(y))$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\tan(xy)) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos x) + \frac{\partial}{\partial y}(g(y))$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x\sec^2(xy) - 0 + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x\sec^2(xy) + g'(y)$$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x\sec^2(xy) + \sin y$. Por el principio de sustitución.

$$x\sec^2(xy) + \sin y = x\sec^2(xy) + g'(y)$$

$$x\sec^2(xy) + \sin y - x\sec^2(xy) = g'(y)$$

$$g'(y) = \sin y$$

Integrando, se obtiene:

$$g(y) = -\cos y + C$$

La solución de la ED es:

$$F(x,y) = \tan(xy) - \cos x - \cos y + C$$

Luego, $F(x,y)=K$, nos da la solución general de la ED.

$\tan(xy)-\cos x-\cos y+C=K$

$\tan(xy)-\cos x-\cos y=K-C$

$\boldsymbol{\tan(xy)-\cos x-\cos y=K_1}$; $\quad K_1=K-C$

11. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy}{x^2}-\frac{ydx}{x^2}=0$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ydx}{x^2}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy}{x^2}=0$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

Sea:

$$M(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x^2}$$

$$M(x,y)=\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{y}{x^2}$$

$$M(x,y)=x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{y}{x^2}$$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{y}{x^2}\right]$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right] - \frac{1}{x^2}\cdot 1$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(2y)\right] - \frac{1}{x^2}$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}}$

$N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x}$

$N(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x}$

$N(x,y) = y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\right]$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \frac{\partial}{\partial x}(x^{-1})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\right] - x^{-2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)\right] - \frac{1}{x^2}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Por lo tanto, debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{y}{x^2}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ para obtener $F(x,y)$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = \int\left[y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\right]dy + h(x)$

$$F(x,y) = \int (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} y\,dy + \int x^{-1}\,dy + h(x)$$

$$F(x,y) = \int (u)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{2} + x^{-1}y + h(x)$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}y + h(x)$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + x^{-1}y + h(x)$$

$$F(x,y) = u^{\frac{1}{2}} + x^{-1}y + h(x)$$

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + x^{-1}y + h(x)$$

Sustitución.

$$u = x^2 + y^2$$

$$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}(x^2+y^2)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2) + \frac{d}{dy}(y^2)$$

$$\frac{du}{dy} = 0 + 2y$$

$$\frac{du}{dy} = 2y$$

$$\frac{du}{2} = ydy$$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a x.

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + x^{-1}y + h(x)\right]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] + y\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}) + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - x^{-2}y + h'(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) - \frac{y}{x^2} + h'(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{y}{x^2} + h'(x)$$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{y}{x^2}$. Por el principio de sustitución.

$$x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{y}{x^2} = x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{y}{x^2} + h'(x)$$

$$x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{y}{x^2} - x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{x^2} = h'(x)$$

$$h'(x) = 0$$

Integrando, se obtiene:

$$h(x) = C$$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + x^{-1}y + C$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + x^{-1}y + C = K$

$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = K - C$

$\sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K_1}; \quad K_1 = K - C$

12. $\left[\ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}\right]dx - \left[\frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}\right]dy = 0$

Solución:

Sea:

$M(x,y) = \ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}\right]$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\ln|\ln(x-y)|] + x\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{(x-y)\ln(x-y)}\right]$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\ln(x-y)}\frac{\partial}{\partial y}[\ln(x-y)] + x\frac{\partial}{\partial y}[(x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-1}]$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial y}(x-y) + x\left\{[\ln(x-y)]^{-1}\frac{\partial}{\partial y}[(x-y)^{-1}] + (x-y)^{-1}\frac{\partial}{\partial y}[[\ln(x-y)]^{-1}]\right\}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y}(-1) + x\left\{[\ln(x-y)]^{-1}[-(x-y)^{-2}(-1)] + (x-y)^{-1}\left[-[\ln(x-y)]^{-2}\cdot\frac{1}{x-y}(-1)\right]\right\}$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y} + x\{[\ln(x-y)]^{-1}(x-y)^{-2} + [\ln(x-y)]^{-2}(x-y)^{-1}(x-y)^{-1}\}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y} + x\{[\ln(x-y)]^{-1}(x-y)^{-2} + [\ln(x-y)]^{-2}(x-y)^{-2}\}}$$

$$N(x,y) = -\left[\frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}\right]$$

$N(x,y) = -\{x(x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-1}\}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\{x(x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-1}\}$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\left\{(x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(x) + x\frac{\partial}{\partial x}\{(x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-1}\}\right\}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\left\{(x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-1}\cdot 1 + x\left\{[\ln(x-y)]^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(x-y)^{-1} + (x-y)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}[[\ln(x-y)]^{-1}]\right\}\right\}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -(x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-1} - x\left\{[\ln(x-y)]^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(x-y)^{-1} + (x-y)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}[[\ln(x-y)]^{-1}]\right\}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y} - x\left\{-[\ln(x-y)]^{-1}(x-y)^{-2} - (x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-2}\frac{\partial}{\partial x}[\ln(x-y)]\right\}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y} - x\left\{-[\ln(x-y)]^{-1}(x-y)^{-2} - (x-y)^{-1}[\ln(x-y)]^{-2}\cdot\frac{1}{x-y}\right\}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y} - x\{-[\ln(x-y)]^{-1}(x-y)^{-2} - [\ln(x-y)]^{-2}(x-y)^{-1}(x-y)^{-1}\}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y} + x\{[\ln(x-y)]^{-1}(x-y)^{-2} + [\ln(x-y)]^{-2}(x-y)^{-2}\}}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\left[\frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}\right]$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ para obtener $F(x,y)$.

$$\int\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = -\int\left[\frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}\right]dy + h(x)$$

$$F(x,y) = -x\int\frac{1}{(x-y)\ln(x-y)}dy + h(x)$$

$$F(x,y) = -x\int\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{(x-y)}dy + h(x)$$

$$F(x,y) = -x\int\frac{1}{u}(-du) + h(x)$$

$$F(x,y) = x\int\frac{1}{u}du + h(x)$$

Sustitución.

$u = \ln(x-y)$

$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}\ln(x-y)$

$\frac{du}{dy} = \frac{1}{x-y}\frac{d}{d}(x-y)$

$\frac{du}{dy} = \frac{1}{x-y}(-1)$

$-du = \frac{1}{x-y}dy$

$F(x,y) = x\ln u + h(x)$

$F(x,y) = x\ln|\ln(x-y)| + h(x)$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a x.

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[x\ln|\ln(x-y)| + h(x)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x\ln|\ln(x-y)|] + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \ln|\ln(x-y)|\frac{\partial}{\partial x}(x) + x\frac{\partial}{\partial x}\{\ln|\ln(x-y)|\} + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \ln|\ln(x-y)|\,(1) + x\frac{1}{\ln(x-y)}\frac{\partial}{\partial x}[\ln(x-y)] + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \ln|\ln(x-y)| + x\frac{1}{\ln(x-y)}\cdot\frac{1}{x-y} + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)} + h'(x)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)}$. Por el principio de sustitución.

$\ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)} = \ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)} + h'(x)$

$\ln|\ln(x-y)| + \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)} - \ln|\ln(x-y)| - \frac{x}{(x-y)\ln(x-y)} = h'(x)$

$h'(x) = 0$

Integrando, se obtiene:

$h(x) = C$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = x\ln|\ln(x-y)| + C$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$x\ln|\ln(x-y)| + C = K$

$x\ln|\ln(x-y)| = K - C$

$\boldsymbol{x\ln|\ln(x-y)| = K_1}$; $\quad K_1 = K - C$

13. Hallar el valor de A tal que la ecuación diferencial sea exacta y resuélvala.

$(2x - y\sin xy + Ay^4)dx - (20xy^3 + x\sin xy)dy = 0.$

Solución:

Sea:

$$M(x,y) = 2x - y\sin xy + Ay^4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x - y\sin xy + Ay^4)$$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(y\sin xy) + A\frac{\partial}{\partial y}(y^4)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 - \left(\sin xy\ \frac{\partial}{\partial y}y + y\frac{\partial}{\partial y}\sin xy\right) + 4Ay^3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\big(\sin xy\,(1) + y\cos xy\,(x)\big) + 4Ay^3$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\sin xy - xy\cos xy + 4Ay^3}$$

$$N(x,y) = -(20xy^3 + x\sin xy)$$

$$N(x,y) = -20xy^3 - x\sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-20xy^3 - x\sin xy)$$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -20y^3\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(x\sin xy)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -20y^3(1) - \left(\sin xy\frac{\partial}{\partial x}(x) + x\frac{\partial}{\partial x}(\sin xy)\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -20y^3 - \big(\sin xy\,(1) + x\cos xy\,(y\,)\big)$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -20y^3 - \sin xy - x\,y\cos xy}$$

Para que la ED sea exacta se debe cumplir que: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

$$-\sin xy - xy\cos xy + 4Ay^3 = -20y^3 - \sin xy - x\,y\cos xy$$

$$4Ay^3 = -20y^3 - \sin xy - x\,y\cos xy + \sin xy + x\,y\cos xy$$

$4Ay^3 = -20y^3$

$A = -\dfrac{20y^3}{4y^3}$

$A = -5$

En efecto, para que la ED sea exacta A debe ser -5.

Luego tenemos la ED a resolver: $(2x - y\sin xy - 5y^4)dx - (20xy^3 + x\sin xy)dy = 0$

Entonces debe existir $F(x, y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x - y\sin xy - 5y^4$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -(20xy^3 + x\sin xy)$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ para obtener $F(x, y)$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int (2x - y\sin xy - 5y^4)\, dx + g(y)$

$F(x, y) = 2\int x dx - y\int \sin xy\, dx - 5y^4 \int dx + g(y)$

$F(x, y) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \int \sin xy \cdot y dx - 5y^4 x + g(y)$

$F(x, y) = x^2 - \int \sin u\, du - 5xy^4 + g(y)$

$F(x, y) = x^2 - (-\cos u) - 5xy^4 + g(y)$

$F(x, y) = x^2 + \cos u - 5xy^4 + g(y)$

$F(x, y) = x^2 + \cos xy - 5xy^4 + g(y)$

Sustitución.

$u = xy$

$\frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} xy$

$\frac{du}{dx} = y$

$du = ydx$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + \cos xy - 5xy^4 + g(y))$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos xy) - \frac{\partial}{\partial y}(5xy^4) + \frac{\partial}{\partial y}[g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0 - x\sin xy - 20xy^3 + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -x\sin xy - 20xy^3 + g'(y)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -(20xy^3 + x\sin xy)$. Por el principio de sustitución.

$-(20xy^3 + x\sin xy) = -x\sin xy - 20xy^3 + g'(y)$

$-20xy^3 - x\sin xy = -x\sin xy - 20xy^3 + g'(y)$

$-20xy^3 - x\sin xy + x\sin xy + 20xy^3 = g'(y)$

$g'(y) = 0$

Integrando, se obtiene:

$g(y) = C$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = x^2 + \cos xy - 5xy^4 + C$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$x^2 + \cos xy - 5xy^4 + C = K$

$x^2 + \cos xy - 5xy^4 = K - C$

$\boldsymbol{x^2 + \cos xy - 5xy^4 = K_1}$; $\quad K_1 = K - C$

14. $(2ye^{2x} + 2x\cos y)dx + (e^{2x} - x^2\sin y)dy = 0$

Solución:

Sea:

$M(x,y) = 2ye^{2x} + 2x\cos y$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2ye^{2x} + 2x\cos y)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2e^{2x}\frac{\partial}{\partial y}(y) + 2x\frac{\partial}{\partial y}\cos y$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2e^{2x}(1) + 2x(-\sin y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mathbf{2e^{2x} - 2x\sin y}$

$N(x,y) = e^{2x} - x^2 \sin y$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x} - x^2 \sin y)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{2x} - \sin y \frac{\partial}{\partial x} x^2$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2e^{2x} - \sin y\,(2x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \mathbf{2e^{2x} - 2x\sin y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta:

Por lo tanto, debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2ye^{2x} + 2x\cos y$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{2x} - x^2 \sin y$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, se obtiene $F(x,y)$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int (2ye^{2x} + 2x\cos y) dx + g(y)$

$F(x,y) = y\int 2e^{2x}\, dx + 2\cos y \int x\, dx + g(y)$

$F(x,y) = ye^{2x} + 2\cos y \cdot \frac{x^2}{2} + g(y)$

$F(x,y) = ye^{2x} + x^2 \cos y + g(y)$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{2x} + x^2 \cos y + g(y))$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{2x} \frac{\partial}{\partial y}(y) + x^2 \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) + \frac{\partial}{\partial y}[g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{2x}(1) + x^2(-\sin y) + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{2x} - x^2 \sin y + g'(y)$

Como sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{2x} - x^2 \sin y$. Por el principio de sustitución.

$e^{2x} - x^2 \sin y = e^{2x} - x^2 \sin y + g'(y)$

$e^{2x} - x^2 \sin y - e^{2x} + x^2 \sin y = g'(y)$

$g'(y) = 0$

Integrando, se obtiene:

$g(y) = C$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = ye^{2x} + x^2 \cos y + C$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$ye^{2x} + x^2 \cos y + C = K$

$ye^{2x} + x^2 \cos y = K - C$

$\boldsymbol{ye^{2x} + x^2 \cos y = K_1}$; $\quad K_1 = K - C$

15. $(1 - xy)^{-2} dx + [y^2 + x^2(1 - xy)^{-2}] dy = 0; \quad y(2) = 1$

Solución:

Sea:

$M(x,y) = (1 - xy)^{-2}$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (1 - xy)^{-2}$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2(1 - xy)^{-3} \frac{\partial}{\partial y} (1 - xy)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2(1 - xy)^{-3}(-x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mathbf{2x(1 - xy)^{-3}}$

$N(x,y) = y^2 + x^2(1 - xy)^{-2}$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[y^2 + x^2(1 - xy)^{-2}]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}[x^2(1 - xy)^{-2}]$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 + \left[(1 - xy)^{-2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + x^2\frac{\partial}{\partial x}(1 - xy)^{-2}\right]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (1 - xy)^{-2}(2x) + x^2[-2(1 - xy)^{-3}(-y)]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x(1 - xy)^{-2} + 2x^2y(1 - xy)^{-3}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x(1 - xy)^{-3}[(1 - xy) + xy]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x(1 - xy)^{-3}[1 - xy + xy]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x(1 - xy)^{-3}(1)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \mathbf{2x(1 - xy)^{-3}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = (1 - xy)^{-2}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y^2 + x^2(1 - xy)^{-2}$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ para obtener $F(x,y)$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int (1 - xy)^{-2}\, dx + g(y)$

$F(x,y) = \int u^{-2}\left(-\frac{du}{y}\right) + g(y)$

$F(x,y) = -\frac{1}{y}\int u^{-2} du + g(y)$

Sustitución.

$u = 1 - xy$

$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(1 - xy)$

$\frac{du}{dx} = -y \quad \rightarrow \quad -\frac{du}{y} = dx$

$F(x,y) = -\frac{1}{y}(-u^{-1}) + g(y)$

$F(x,y) = \frac{1}{y}u^{-1} + g(y)$

$F(x,y) = \frac{1}{y}(1-xy)^{-1} + g(y)$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}(1-xy)^{-1} + g(y)\right]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[y^{-1}(1-xy)^{-1}] + \frac{\partial}{\partial y}[g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = (1-xy)^{-1}\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1}) + y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}[(1-xy)^{-1}] + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = (1-xy)^{-1}(-y^{-2}) + y^{-1}[-(1-xy)^{-2}(-x)] + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -y^{-2}(1-xy)^{-1} + xy^{-1}(1-xy)^{-2} + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2(1-xy)} + \frac{x}{y(1-xy)^2} + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{-(1-xy)+xy}{y^2(1-xy)^2} + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{-1+xy+xy}{y^2(1-xy)^2} + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{2xy-1}{y^2(1-xy)^2} + g'(y)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y^2 + x^2(1-xy)^{-2}$. Por el principio de sustitución.

$y^2 + x^2(1-xy)^{-2} = \frac{2xy-1}{y^2(1-xy)^2} + g'(y)$

$y^2 + \frac{x^2}{(1-xy)^2} - \frac{2xy-1}{y^2(1-xy)^2} = g'(y)$

$y^2 + \frac{x^2y^2-(2xy-1)}{y^2(1-xy)^2} = g'(y)$

$y^2 + \frac{x^2y^2-2xy+1}{y^2(1-xy)^2} = g'(y)$

$y^2 + \frac{1-2xy+x^2y^2}{y^2(1-xy)^2} = g'(y)$

$y^2 + \frac{(1-xy)^2}{y^2(1-xy)^2} = g'(y)$

$y^2 + \frac{1}{y^2} = g'(y)$

$g'(y) = y^2 + \frac{1}{y^2}$

Integrando, se obtiene:

$$g(y) = \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} + C$$

La solución de la ED es:

$$F(x,y) = \frac{1}{y}(1-xy)^{-1} + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} + C$$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$$\frac{1}{y}(1-xy)^{-1} + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} + C = K$$

$$\frac{1}{y(1-xy)} + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} = K - C$$

$\frac{1}{y(1-xy)} + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} = K_1; \quad K_1 = K - C$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 2$, $y = 1$.

$$\frac{1}{1(1-2\cdot 1)} + \frac{1^3}{3} - \frac{1}{1} = K_1$$

$$\frac{1}{(1-2)} + \frac{1}{3} - 1 = K_1$$

$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{3} - 1 = K_1$$

$$-1 + \frac{1}{3} - 1 = K_1$$

$$\frac{1}{3} - 2 = K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{y(1-xy)} + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{-y(xy-1)} + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} = -\frac{5}{3}$$

$$3y(1-xy)\left[\frac{1}{y(1-xy)} + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y} = -\frac{5}{3}\right]$$

$$3y(1-xy) \cdot \frac{1}{y(1-xy)} + 3y(1-xy) \cdot \frac{y^3}{3} - 3y(1-xy) \cdot \frac{1}{y} = 3y(1-xy) \cdot -\frac{5}{3}$$

$$3 + y^4(1-xy) - 3(1-xy) = -5y(1-xy)$$

$$3 + y^4 - xy^5 - 3 + 3xy = -5y + 5xy^2$$

$$y^4 - xy^5 + 3xy = -5y + 5xy^2$$

$$y(y^3 - xy^4 + 3x) = y(-5 + 5xy)$$

$$y^3 - xy^4 + 3x = -5 + 5xy$$

$$-(y^3 - xy^4 + 3x = -5 + 5xy)$$

$$-y^3 + xy^4 - 3x = 5 - 5xy$$

$$\boldsymbol{xy^4 - y^3 + 5xy - 3x = 5}$$

16. $[(1+y^2)^{-1}+\cos x-2xy]y'=y(y+\sin x); \qquad y(0)=1$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy$.

$[(1+y^2)^{-1}+\cos x-2xy]\frac{dy}{dx}=y(y+\sin x)$

$[(1+y^2)^{-1}+\cos x-2xy]dy=y(y+\sin x)dx$

$y(y+\sin x)dx=[(1+y^2)^{-1}+\cos x-2xy]dy$

$y(y+\sin x)dx-[(1+y^2)^{-1}+\cos x-2xy]dy=0$

Sea:

$M(x,y)=y(y+\sin x)$

$M(x,y)=y^2+y\sin x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2+y\sin x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\sin x\frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y+\sin x\,(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y+\sin x}$

$N(x,y)=-[(1+y^2)^{-1}+\cos x-2xy]$

$N(x,y)=-(1+y^2)^{-1}-\cos x+2xy$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[-(1+y^2)^{-1}-\cos x+2xy]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[-(1+y^2)^{-1}]-\frac{\partial}{\partial x}\cos x+2y\frac{\partial}{\partial x}x$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0-(-\sin x)+2y(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2y+\sin x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y^2 + y \sin x$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -(1 + y^2)^{-1} - \cos x + 2xy$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ para obtener $F(x, y)$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int (y^2 + y \sin x) dx + g(y)$

$F(x, y) = y^2 \int dx + y \int \sin x \, dx + g(y)$

$F(x, y) = y^2 x + y(-\cos x) + g(y)$

$F(x, y) = xy^2 - y \cos x + g(y)$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (xy^2 - y \cos x + g(y))$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y} (y^2) - \cos x \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial y} [g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x(2y) - \cos x \,(1) + g'(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xy - \cos x + g'(y)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -(1 + y^2)^{-1} - \cos x + 2xy$. Por el principio de sustitución.

$-(1 + y^2)^{-1} - \cos x + 2xy = 2xy - \cos x + g'(y)$

$-(1 + y^2)^{-1} = g'(y)$

$g'(y) = -(1 + y^2)^{-1}$

$$g'(y) = -\frac{1}{1 + y^2}$$

Integrando, se obtiene:

$g(y) = -\tan^{-1} y + C$

La solución de la ED es:

$F(x,y) = xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y + C$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y + C = K$

$xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y = K - C$

$xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y = K_1; \quad K_1 = K - C$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 1$.

$(0)\cdot 1^2 - (1)\cos 0 - \tan^{-1} 1 = K_1$

$-1 - \frac{\pi}{4} = K_1$

$K_1 = -1 - \frac{\pi}{4}$

$xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y = -1 - \frac{\pi}{4}$

$-\left(xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y = -1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$-xy^2 + y\cos x + \tan^{-1} y = 1 + \frac{\pi}{4}$

$\tan^{-1} y + y\cos x - xy^2 = 1 + \frac{\pi}{4}$

$\boldsymbol{\tan^{-1} y + y\cos x - xy^2 - 1 = \frac{\pi}{4}}$

17. $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0; \quad y(0)=2$

Solución:

Sea:

$M(x,y)=x+e^{\frac{x}{y}}$ $\quad$ $N(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)$ $\quad$ $N(x,y)=e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0+e^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)$ $\quad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1})$ $\quad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\right)-\left(e^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}(-xy^{-2})$ $\quad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\left(e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-xy^{-2}e^{\frac{x}{y}}}$ $\quad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-xy^{-2}e^{\frac{x}{y}}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ $\quad$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=x+e^{\frac{x}{y}}$ $\quad$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ para obtener $F(x,y)$.

$\int\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx=\int\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+g(y)$

Sustitución.

$u = \frac{x}{y}$

$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}$

$ydu = dx$

$$F(x,y) = \int x\,dx + \int e^{\frac{x}{y}}\,dx + g(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \int e^{u}ydu + g(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + y\int e^{u}du + g(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + ye^{u} + g(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} + g(y)$$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} + g(y)\right]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{\frac{x}{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}[g(y)]$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0 + e^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial y}(y) + y\frac{\partial}{\partial y}e^{\frac{x}{y}} + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}(1) + ye^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} + ye^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1}) + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} + ye^{\frac{x}{y}}(-xy^{-2}) + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} - y\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} + g'(y)$$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$. Por el principio de sustitución.

$$e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} + g'(y)$$

$$e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}} + \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} = g'(y)$$

$g'(y) = 0$

Integrando, se obtiene:

$g(y) = C$

La solución de la ED es:

$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} + C$

$F(x, y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} + C = K$$

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = K - C$$

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = K_1; \quad K_1 = K - C$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 2$.

$$\frac{0^2}{2} + 2e^{\frac{0}{2}} = K_1$$

$$0 + 2e^0 = K_1$$

$$2e^0 = K_1$$

$$2 \cdot 1 = K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$$

$$2\left(\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2\right)$$

$$\boldsymbol{x^2 + 2ye^{\frac{x}{y}} = 4}$$

18. $\left(\frac{x}{x^2-y}+\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{2y-2x^2}-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0; \quad y(\sqrt{2})=1$

Solución:

Sea:

$M(x,y)=\frac{x}{x^2-y}+\frac{2x}{y}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2-y}+\frac{2x}{y}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2-y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial y}[(x^2-y)^{-1}]+2x\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\left[-(x^2-y)^{-2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)\right]+2x(-y^{-2})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x[-(x^2-y)^{-2}(-1)]-2xy^{-2}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x(x^2-y)^{-2}-2xy^{-2}$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{(x^2-y)^2}-\frac{2x}{y^2}}$

$N(x,y)=\frac{1}{2y-2x^2}-\frac{x^2}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2y-2x^2}-\frac{x^2}{y^2}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2y-2x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[(2y-2x^2)^{-1}]-\frac{2x}{y^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-(2y-2x^2)^{-2}\frac{\partial}{\partial x}(2y-2x^2)-\frac{2x}{y^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-(2y-2x^2)^{-2}(-4x)-\frac{2x}{y^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=4x(2y-2x^2)^{-2}-\frac{2x}{y^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2^2x[2(y-x^2)]^{-2} - \frac{2x}{y^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2^2x2^{-2}(y-x^2)^{-2} - \frac{2x}{y^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = x(y-x^2)^{-2} - \frac{2x}{y^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{(y-x^2)^2} - \frac{2x}{y^2}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{(x^2-y)^2} - \frac{2x}{y^2}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Por lo tanto, debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{x^2-y} + \frac{2x}{y}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2y-2x^2} - \frac{x^2}{y^2}$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$para obtener $F(x,y)$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int \left(\frac{x}{x^2-y} + \frac{2x}{y}\right) dx + g(y)$

$F(x,y) = \int \frac{x}{x^2-y} dx + \frac{2}{y}\int x dx + g(y)$

$F(x,y) = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-y} dx + \frac{2}{y} \cdot \frac{x^2}{2} + g(y)$

$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2-y) + \frac{x^2}{y} + g(y)$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-y) + \frac{x^2}{y} + g(y)\right]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[\ln(x^2-y)] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}[g(y)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-y}\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) + x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1}) + g'(y)$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - y}(-1) + x^2(-y^{-2}) + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2x^2 - 2y} + x^2(-y^{-2}) + g'(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2x^2 - 2y} - \frac{x^2}{y^2} + g'(y)$$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2y - 2x^2} - \frac{x^2}{y^2}$. Por el principio de sustitución.

$$\frac{1}{2y - 2x^2} - \frac{x^2}{y^2} = -\frac{1}{2x^2 - 2y} - \frac{x^2}{y^2} + g'(y)$$

$$\frac{1}{2y - 2x^2} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2y - 2x^2} - \frac{x^2}{y^2} + g'(y)$$

$$\frac{1}{2y - 2x^2} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{2y - 2x^2} + \frac{x^2}{y^2} = g'(y)$$

$$g'(y) = 0$$

Integrando, se obtiene:

$$g(y) = C$$

La solución de la ED es:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - y) + \frac{x^2}{y} + C$$

$F(x,y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 - y) + \frac{x^2}{y} + C = K$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 - y) + \frac{x^2}{y} = K - C$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 - y) + \frac{x^2}{y} = K_1; \qquad K_1 = K - C$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = \sqrt{2}$, $y = 1$.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1\right) + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{1} = K_1$$

$\frac{1}{2}\ln(2-1)+\frac{2}{1}=K_1$

$\frac{1}{2}\ln(1)+2=K_1$

$\frac{1}{2}\cdot 0+2=K_1$

$0+2=K_1 \quad \rightarrow \quad K_1=2$

$\frac{1}{2}\ln(x^2-y)+\frac{x^2}{y}=2$

$\ln(x^2-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{x^2}{y}=2$

$\mathbf{\ln\sqrt{x^2-y}+\frac{x^2}{y}=2}$

19. Obtenga una función $M(x,y)$ de modo que la ecuación diferencial sea exacta.

$M(x,y)dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy=0.$

Solución:

$N(x,y)=xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})+\frac{\partial}{\partial x}(2xy)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(x)+x\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})+2y\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^{xy}(1)+x(ye^{xy})+2y(1)+(-x^{-2})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}+2y-x^{-2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}$

Para que la ED sea exacta se debe cumplir que: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dy = \int \left(e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}\right) dy + h(x)$$

$$M(x,y) = \int e^{xy}\, dy + \int xy\, e^{xy} dy + \int 2y\, dy - \int \frac{1}{x^2} dy + h(x)$$

$$M(x,y) = \int e^{xy}\, dy + \int xy\, e^{xy} dy + 2\int y\, dy - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

$$M(x,y) = \int e^{u} \frac{du}{x} + \int u\, e^{u} \frac{du}{x} + 2 \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

$$M(x,y) = \frac{1}{x}\int e^{u}\, du + \frac{1}{x}\int u\, e^{u} du + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

$$M(x,y) = \frac{1}{x}\int e^{u}\, du + \frac{1}{x}\left(ue^{u} - \int e^{u} du\right) + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

$$M(x,y) = \frac{1}{x}\int e^{u}\, du + \frac{1}{x}ue^{u} - \frac{1}{x}\int e^{u} du + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

$$M(x,y) = \frac{1}{x}ue^{u} + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

Sustitución.

$u = xy$

$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}xy$

$\frac{du}{dy} = x$

$\frac{du}{x} = dy$

Integración por partes.

$u_1 = u$ $\quad$ $dv = e^{u}du$

$\frac{d}{du}u_1 = \frac{d}{du}u$ $\quad$ $\int dv = \int e^{u}du$

$\frac{du_1}{du} = 1$ $\quad$ $v = e^{u}$

$du_1 = du$

Escribiendo la $M(x,y)$ en términos de x e y.

$$M(x,y) = \frac{1}{x}xye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

$$M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x)$$

Para que la ecuación diferencial $M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right) dy = 0$ sea exacta $M(x,y)$ debe ser:

$$\boldsymbol{M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + h(x)}$$

20. $\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx=(1-\ln x)dy$

Solución:

Transformemos la ED de la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$$\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx=(1-\ln x)dy$$

$$\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx-(1-\ln x)dy=0$$

$$\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx+(\ln x-1)dy=0$$

Sea:

$$M(x,y)=1+\ln x+\frac{y}{x}$$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(1)+\frac{\partial}{\partial y}(\ln x)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0+0+\frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{x}}$$

$$N(x,y)=\ln x-1$$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\ln x-1)$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\ln x)-\frac{\partial}{\partial x}(1)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x}-0$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x}}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Entonces debe existir $F(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 1 + \ln x + \frac{y}{x}$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \ln x - 1$

Integrando $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ para obtener $F(x,y)$.

$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy = \int (\ln x - 1)\, dy + h(x)$

$F(x,y) = \int \ln x\, dy - \int dy + h(x)$

$F(x,y) = \ln x \int dy - y + h(x)$

$F(x,y) = \ln x\,(y) - y + h(x)$

$F(x,y) = y \ln x - y + h(x)$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a x.

$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[y \ln x - y + h(x)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y \ln x) - \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)]$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial x}(\ln x) - 0 + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y\left(\frac{1}{x}\right) + h'(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x} + h'(x)$

Sabemos que: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 1 + \ln x + \frac{y}{x}$. Por el principio de sustitución.

$$1 + \ln x + \frac{y}{x} = \frac{y}{x} + h'(x)$$

$1 + \ln x + \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = h'(x)$

$h'(x) = 1 + \ln x$

Integrando, se obtiene:

$h(x) = \int (1 + \ln x)\, dx + C$

$h(x) = \int dx + \int \ln x \, dx + C$

$h(x) = x + \int \ln x \, dx + C$

$h(x) = x + \ln x \, (x) - \int x \frac{dx}{x} + C$

$h(x) = x + x\ln x - \int dx + C$

$h(x) = x + x\ln x - x + C$

$h(x) = x\ln x + C$

Integración por partes.

$u = \ln x$ $\qquad dv = dx$

$\frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} \ln x$ $\qquad \int dv = \int dx$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\qquad v = x$

$du = \frac{dx}{x}$

La solución de la ED es:

$F(x, y) = y \ln x - y + x\ln x + C$

$F(x, y) = K$, nos da la solución general de la ED.

$y \ln x - y + x\ln x + C = K$

$y \ln x - y + x\ln x = K - C$

$y \ln x - y + x\ln x = K_1; \qquad K_1 = K - C$

$y(\ln x - 1) + x\ln x = K_1$

$y(\ln x - 1) = K_1 - x\ln x$

$$y = \frac{K_1 - x\ln x}{(\ln x - 1)}$$

$$y = \frac{K_1 - x\ln x}{\ln x - 1}$$

Luego, $\boldsymbol{y = \frac{K_1 - x\ln x}{\ln x - 1}}$ es solución general explícita de la ED.

3.6 Método de agrupación

3.6.1 Soluciones de EDO por método de agrupación

• Comprobar si las siguientes ED son exactas y resuelva por agrupación. Determine la solución particular cuando se presente una condición inicial.

1. $\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right)dx + \left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right)dy = 0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Entonces comprobamos la exactitud.

Sea:

$M(x,y) = \frac{1}{x} + ye^{xy}$ $\qquad$ $N(x,y) = \frac{1}{y} + xe^{xy}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right)$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + e^{xy} + ye^{xy} \cdot x$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 + e^{xy} + xe^{xy} \cdot y$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta.

Procedemos a suprimir los paréntesis.

$\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right)dx + \left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right)dy = 0$

$\frac{1}{x}dx + ye^{xy}dx + \frac{1}{y}dy + xe^{xy}dy = 0$

$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + (ye^{xy}dx + xe^{xy}dy) = 0$

$d(\ln x) + d(\ln y) + d(e^{xy}) = d(C)$

$d(\ln x + \ln y + e^{xy}) = d(C)$

$\int d(\ln x + \ln y + e^{xy}) = \int d(C)$

$\ln x + \ln y + e^{xy} = C$

$\mathbf{\ln xy + e^{xy} = C}$, solución general de la ED.

2. $\left(\frac{2x}{y} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx + N(x.y)dy = 0$. Entonces comprobamos la exactitud.

Sea:

$M(x,y) = \frac{2x}{y} - \frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x\left(-\frac{1}{y^2}\right) - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}$

$N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{y^2}(2x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2x}{y^2}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta:

Procedemos a suprimir los paréntesis.

$\left(\frac{2x}{y}-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$

$\frac{2x}{y}dx-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{x^2}{y^2}dy=0$

$\left(\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy\right)+\left(\frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx\right)=0$

$\left(\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy\right)+\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)=0$

$d\left(\frac{x^2}{y}\right)+d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=d(C)$

$d\left(\frac{x^2}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=d(C)$

$\int d\left(\frac{x^2}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=\int d(C)$

$\boldsymbol{\frac{x^2}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}=C}$, solución general de la ED.

3. $\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)y'-\frac{\sin 2x}{y}-x=0$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)y'-\frac{\sin 2x}{y}-x=0$

$\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)\frac{dy}{dx}-\frac{\sin 2x}{y}-x=0$

$\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2x}{y}+x$

$\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)dy=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx$

$0=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx-\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)dy$

$0=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy$

$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$

Sea:

$M(x, y) = \frac{\sin 2x}{y} + x$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin 2x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin 2x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) + 0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin 2x \left(-\frac{1}{y^2}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\frac{\sin 2x}{y^2}}$

$N(x, y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 - \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}(\sin^2 x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}(2 \sin x \cos x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}(\sin 2x)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{\sin 2x}{y^2}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta. Procedemos a suprimir paréntesis.

$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$

$\frac{\sin 2x}{y} dx + xdx + ydy - \frac{\sin^2 x}{y^2} dy = 0$

$\left(\frac{\sin 2x}{y} dx - \frac{\sin^2 x}{y^2} dy\right) + xdx + ydy = 0$

$\left(\frac{2 \sin x \cos x}{y} dx - \frac{\sin^2 x}{y^2} dy\right) + xdx + ydy = 0$

$d\left(\frac{\sin^2 x}{y}\right) + d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = d(C)$

$d\left(\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2}\right) = \int d(C)$

$\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C$, solución general de la ED.

4. $\left(2y\sin x\cos x-y+2y^2e^{xy^2}\right)dx=\left(x-\sin^2 x-4xye^{xy^2}\right)dy$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$\left(2y\sin x\cos x-y+2y^2e^{xy^2}\right)dx=\left(x-\sin^2 x-4xye^{xy^2}\right)dy$

$\left(2y\sin x\cos x-y+2y^2e^{xy^2}\right)dx-\left(x-\sin^2 x-4xye^{xy^2}\right)dy=0$

$\left(2y\sin x\cos x-y+2y^2e^{xy^2}\right)dx+\left(\sin^2 x-x+4xye^{xy^2}\right)dy=0$

Sea:

$M(x,y)=2y\sin x\cos x-y+2y^2e^{xy^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y\sin x\cos x-y+2y^2e^{xy^2}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2y\sin x\cos x)-\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2y^2e^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2\sin x\cos x\frac{\partial}{\partial y}(y)-\frac{\partial}{\partial y}(y)+2\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2e^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2\sin x\cos x\,(1)-1+2\left(2ye^{xy^2}+y^2e^{xy^2}\cdot 2xy\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2\sin x\cos x-1+2\left(2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2\sin x\cos x-1+4ye^{xy^2}+4xy^3e^{xy^2}}$

$N(x,y)=\sin^2 x-x+4xye^{xy^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x-x+4xye^{xy^2}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\sin^2 x)-\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial x}\left(4xye^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2\sin x\cos x-1+4\frac{\partial}{\partial x}\left(xye^{xy^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin x\cos x - 1 + 4\left(ye^{xy^2} + xye^{xy^2}\cdot y^2\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin x\cos x - 1 + 4\left(ye^{xy^2} + xy^3e^{xy^2}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin x\cos x - 1 + 4ye^{xy^2} + 4xy^3e^{xy^2}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar los paréntesis.

$\left(2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2}\right)dx + \left(\sin^2 x - x + 4xye^{xy^2}\right)dy = 0$

$2y\sin x\cos xdx - ydx + 2y^2e^{xy^2}dx + \sin^2 xdy - xdy + 4xye^{xy^2}dy = 0$

$(2y\sin x\cos xdx + \sin^2 xdy) + (-ydx - xdy) + \left(2y^2e^{xy^2}dx + 4xye^{xy^2}dy\right) = 0$

$d(y\sin^2 x) - d(xy) + d\left(2e^{xy^2}\right) = d(C)$

$d\left(y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2}\right) = d(C)$

$\int d\left(y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2}\right) = \int d(C)$

$\boldsymbol{y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} = C}$, solución general de la ED.

5. $(ye^{x+y} + xe^{x-y} + e^{x-y})dx + (ye^{x+y} + e^{x+y} - xe^{x-y})dy = 0\,;\quad y(1) = 0$

Solución:

Sea:

$M(x,y) = ye^{x+y} + xe^{x-y} + e^{x-y}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{x+y} + xe^{x-y} + e^{x-y})$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{x+y}) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{x-y}) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{x-y})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{x+y}) + x\frac{\partial}{\partial y}(e^{x-y}) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{x-y})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{x+y} + ye^{x+y} + x(-e^{x-y}) - e^{x-y}$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{x+y} + ye^{x+y} - xe^{x-y} - e^{x-y}}$

$N(x,y) = ye^{x+y} + e^{x+y} - xe^{x-y}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{x+y} + e^{x+y} - xe^{x-y})$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{x+y}) + \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y}) - \frac{\partial}{\partial x}(xe^{x-y})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = ye^{x+y} + e^{x+y} - (e^{x-y} + xe^{x-y})$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{x+y} + ye^{x+y} - xe^{x-y} - e^{x-y}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta. Procedemos a eliminar los paréntesis.

$(ye^{x+y} + xe^{x-y} + e^{x-y})dx + (ye^{x+y} + e^{x+y} - xe^{x-y})dy = 0$

$ye^{x+y}dx + xe^{x-y}dx + e^{x-y}dx + ye^{x+y}dy + e^{x+y}dy - xe^{x-y}dy = 0$

$(ye^{x+y}dx + ye^{x+y}dy + e^{x+y}dy) + (xe^{x-y}dx + e^{x-y}dx - xe^{x-y}dy) = 0$

$(ye^{x+y}dx + e^{x+y}dy + ye^{x+y}dy) + (e^{x-y}dx + xe^{x-y}dx - xe^{x-y}dy) = 0$

$d(ye^{x+y}) + d(xe^{x-y}) = d(C)$

$d(ye^{x+y} + xe^{x-y}) = d(C)$

$\int d(ye^{x+y} + xe^{x-y}) = \int d(C)$

$ye^{x+y} + xe^{x-y} = C$, solución general de la ED.

Determinamos la solución particular de la ED para $y(1) = 0$.

$(0)e^{1+0} + (1)e^{1-0} = C$

$0 + e^1 = C$

$e = C$

$C = e$

$\boldsymbol{ye^{x+y} + xe^{x-y} = e}$, solución particular de la ED.

6. $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x)dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)dy = 0\,; \quad y(0) = 0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, comprobamos la exactitud.

Sea:

$M(x,y) = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}\cos 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(2e^{xy}\sin 2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos 2x\,\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) - 2\sin 2x\,\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + 0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos 2x\,(e^{xy} + xye^{xy}) - 2\sin 2x\,(xe^{xy})$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2xe^{xy}\sin 2x}$

$N(x,y) = xe^{xy}\cos 2x - 3$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}\cos 2x - 3)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}\cos 2x) - \frac{\partial}{\partial x}(3)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{xy}\cos 2x\,\frac{\partial}{\partial x}(x) + x\cos 2x\,\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) + xe^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(\cos 2x) - 0$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{xy}\cos 2x\,(1) + x\cos 2x\,(ye^{xy}) + xe^{xy}(-2\sin 2x)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2xe^{xy}\sin 2x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta; procedemos a suprimir paréntesis y agrupar términos.

$(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x)dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)dy = 0$

$ye^{xy}\cos 2x\,dx - 2e^{xy}\sin 2x\,dx + 2x\,dx + \ xe^{xy}\cos 2x\,dy - 3dy = 0$

$(ye^{xy}\cos 2x\,dx - 2e^{xy}\sin 2x\,dx + \ xe^{xy}\cos 2x\,dy) + 2xdx - 3dy = 0$

$d(e^{xy}\cos 2x) + d(x^2) - d(3y) = d(C)$

$d(e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y) = d(C)$

$\int d(e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y) = \int d(C)$

$e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y = C$, solución general de la ED.

Determinemos la solución particular para $y(0) = 0$.

$e^{0\cdot 0}\cos 2(0) + (0)^2 - 3(0) = C$

$e^0\cos 0 + 0 - 0 = C$

$1\cdot 1 = C$

$1 = C$

$C = 1$

$\boldsymbol{e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y = 1}$, solución particular de la ED.

7. $y\cos xy\,dx + (x\cos xy + \sin y)dy = 0$; $\ sujeta\ \ a\ y(3) = 0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, verificamos la exactitud de la ED.

Sea:

$M(x,y) = y\cos xy$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y\cos xy)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos xy + y(-x\sin xy)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos xy - xy\sin xy}$

$N(x,y) = x\cos xy + \sin y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos xy + \sin y)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos xy) + \frac{\partial}{\partial x}(\sin y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos xy + x(-y\sin xy) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos xy - xy\sin xy}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$y\cos xy\,dx + (x\cos xy + \sin y)dy = 0$

$y\cos xy\,dx + x\cos xy\,dy + \sin y\,dy = 0$

$(y\cos xy\,dx + x\cos xy\,dy) + \sin y\,dy = 0$

$d(\sin xy) + d(-\cos y) = d(C)$

$d(\sin xy - \cos y) = d(C)$

$\int d(\sin xy - \cos y) = \int d(C)$

$\sin xy - \cos y = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular para $y(3) = 0$.

$\sin 3\cdot 0 - \cos 0 = C$

$\sin 0 - 1 = C$

$0 - 1 = C$

$-1 = C$

$C = -1$

$\sin xy - \cos y = -1$

$\boldsymbol{\sin xy - \cos y + 1 = 0}$, solución particular de la ED.

8. $\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}dx+\frac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}dy=0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, verificamos la exactitud de la ED.

Sea:

$$M(x,y)=\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}\right)$$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{(xy^2-x^3)\frac{\partial}{\partial y}(y^2-2x^2)-(y^2-2x^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2-x^3)}{(xy^2-x^3)^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{(xy^2-x^3)(2y)-(y^2-2x^2)(2xy)}{(xy^2-x^3)^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{2xy^3-2x^3y-2xy^3+4x^3y}{(xy^2-x^3)^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{2x^3y}{(xy^2-x^3)^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{2x^3y}{[x(y^2-x^2)]^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{2x^3y}{x^2(y^2-x^2)^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{2xy}{(y^2-x^2)^2}}$$

$$N(x,y)=\frac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{(y^3-x^2y)\frac{\partial}{\partial x}(2y^2-x^2)-(2y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial x}(y^3-x^2y)}{(y^3-x^2y)^2}$$

Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{(y^3-x^2y)(-2x)-(2y^2-x^2)(-2xy)}{(y^3-x^2y)^2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{-2xy^3+2x^3y+4xy^3-2x^3y}{(y^3-x^2y)^2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{2xy^3}{(y^3-x^2y)^2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{2xy^3}{[y(y^2-x^2)]^2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{2xy^3}{y^2(y^2-x^2)^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{2xy}{(y^2-x^2)^2}}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta.

$$\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}dx+\frac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}dy=0$$

$$\frac{y^2-x^2-x^2}{x(y^2-x^2)}dx+\frac{y^2+y^2-x^2}{y(y^2-x^2)}dy=0$$

Factorizando.

$$\left[\frac{y^2-x^2}{x(y^2-x^2)}-\frac{x^2}{x(y^2-x^2)}\right]dx+\left[\frac{y^2}{y(y^2-x^2)}+\frac{y^2-x^2}{y(y^2-x^2)}\right]dy=0$$

Separando en fracciones homogéneas.

$$\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2-x^2}\right]dx+\left[\frac{y}{y^2-x^2}+\frac{1}{y}\right]dy=0$$

Simplificando.

$$\frac{1}{x}dx-\frac{x}{y^2-x^2}dx+\frac{y}{y^2-x^2}dy+\frac{1}{y}dy=0$$

$$\frac{1}{x}dx+\left(-\frac{x}{y^2-x^2}dx+\frac{y}{y^2-x^2}dy\right)+\frac{1}{y}dy=0$$

$$d(\ln x)+d\left[\frac{1}{2}\ln(y^2-x^2)\right]+d(\ln y)=d(C)$$

$d\left[\ln x + \frac{1}{2}\ln(y^2 - x^2) + \ln y\right] = d(C)$

$\int d\left[\ln x + \frac{1}{2}\ln(y^2 - x^2) + \ln y\right] = \int d(C)$

$2\left[\ln x + \frac{1}{2}\ln(y^2 - x^2) + \ln y = C\right]$

$2\ln x + \ln(y^2 - x^2) + 2\ln y = 2C$

$\ln x^2 + \ln(y^2 - x^2) + \ln y^2 = C_1;\;\; C_1 = 2C$

$\ln x^2 + \ln y^2 + \ln(y^2 - x^2) = C_1$

$\ln[x^2y^2(y^2 - x^2)] = C_1$

$x^2y^2(y^2 - x^2) = e^{C_1}$

$x^2y^2(y^2 - x^2) = K;\;\; K = e^{C_1}$

$\boldsymbol{x^2y^2(y^2 - x^2) = K}$, solución general de la ED.

9. $(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)dx + 2xy(10y^2 - 3x^2)dy = 0$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x, y) = 5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5x^4) - 9x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + 5\frac{\partial}{\partial y}(y^4)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 - 9x^2(2y) + 5(4y^3)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -18x^2y + 20y^3$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 20y^3 - 18x^2y}$

$N(x,y) = 2xy(10y^2 - 3x^2)$

$N(x,y) = 20xy^3 - 6x^3y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(20xy^3 - 6x^3y)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 20y^3\frac{\partial}{\partial x}(x) - 6y\frac{\partial}{\partial x}(x^3)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 20y^3(1) - 6y(3x^2)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 20y^3 - 18x^2y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)dx + 2xy(10y^2 - 3x^2)dy = 0$

$5x^4dx - 9x^2y^2dx + 5y^4dx + 20xy^3dy - 6x^3ydy = 0$

$5x^4dx - (9x^2y^2dx + 6x^3ydy) + (5y^4dx + 20xy^3dy) = 0$

$d(x^5) - d(3x^3y^2) + d(5xy^4) = d(C)$

$d(x^5 - 3x^3y^2 + 5xy^4) = d(C)$

$\int d(x^5 - 3x^3y^2 + 5xy^4) = \int d(C)$

$\boldsymbol{x^5 - 3x^3y^2 + 5xy^4 = C}$, solución general de la ED.

10. $(\cos 2y - 3x^2y^2)dx + (\cos 2y - 2x\sin 2y - 2x^3y)dy = 0$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = \cos 2y - 3x^2y^2$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos 2y - 3x^2y^2)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos 2y) - 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2\sin 2y - 3x^2(2y)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2\sin 2y - 6x^2 y}$

$N(x,y) = \cos 2y - 2x\sin 2y - 2x^3 y$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos 2y - 2x\sin 2y - 2x^3 y)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos 2y) - 2\sin 2y \frac{\partial}{\partial x}(x) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(x^3)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 - 2\sin 2y\,(1) - 2y(3x^2)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2\sin 2y - 6x^2 y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$(\cos 2y - 3x^2y^2)dx + (\cos 2y - 2x\sin 2y - 2x^3y)dy = 0$

$\cos 2y\,dx - 3x^2y^2dx + \cos 2y\,dy - 2x\sin 2y\,dy - 2x^3ydy = 0$

$(\cos 2y\,dx - 2x\sin 2y\,dy) - (3x^2y^2dx + 2x^3ydy) + \cos 2y\,dy = 0$

$d(x\cos 2y) - d(x^3y^2) + d\left(\frac{1}{2}\sin 2y\right) = d(C)$

$d\left(x\cos 2y - x^3y^2 + \frac{1}{2}\sin 2y\right) = d(C)$

$\int d\left(x\cos 2y - x^3y^2 + \frac{1}{2}\sin 2y\right) = \int d(C)$

$x\cos 2y - x^3y^2 + \frac{1}{2}\sin 2y = C$

$x\cos 2y - x^3y^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\sin y\cos y = C$

$x\cos 2y - x^3y^2 + \sin y\cos y = C$

$\boldsymbol{\sin y\cos y + x\cos 2y - x^3y^2 = C}$, solución general de la ED.

11. $[1+\tan(xy)]dx+[\sec(xy)\tan(xy)+x\sec^2(xy)][xdy+ydx]=0$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$[1+\tan(xy)]dx+[\sec(xy)\tan(xy)+x\sec^2(xy)][xdy+ydx]=0$

$[1+\tan(xy)]dx+x[\sec(xy)\tan(xy)+x\sec^2(xy)]dy+y[\sec(xy)\tan(xy)+x\sec^2(xy)]dx=0$

$[1+\tan(xy)]dx+[x\sec(xy)\tan(xy)+x^2\sec^2(xy)]dy+[\text{y}\sec(xy)\tan(xy)+xy\sec^2(xy)]dx=0$

$[1+\tan(xy)]dx+[\text{y}\sec(xy)\tan(xy)+xy\sec^2(xy)]dx+[x\sec(xy)\tan(xy)+x^2\sec^2(xy)]dy=0$

$[1+\tan(xy)+\text{y}\sec(xy)\tan(xy)+xy\sec^2(xy)]dx+[x\sec(xy)\tan(xy)+x^2\sec^2(xy)]dy=0$

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y)=1+\tan(xy)+\text{y}\sec(xy)\tan(xy)+xy\sec^2(xy)$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}[1+\tan(xy)+\text{y}\sec(xy)\tan(xy)+xy\sec^2(xy)]$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(1)+\frac{\partial}{\partial y}[\tan(xy)]+\frac{\partial}{\partial y}[y\sec(xy)\tan(xy)]+x\frac{\partial}{\partial y}[y\sec^2(xy)]$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\sec^2(xy)+\sec(xy)\tan(xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)+y\tan(xy)\frac{\partial}{\partial y}[\sec(xy)]+$

$y\sec(xy)\frac{\partial}{\partial y}[\tan(xy)]+x\left\{\sec^2(xy)\frac{\partial}{\partial y}y+y\frac{\partial}{\partial y}[\sec^2(xy)]\right\}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\sec^2(xy)+\sec(xy)\tan(xy)\,(1)+y\tan(xy)\,[x\sec(xy)\tan(xy)]+$

$y\sec(xy)\,[x\sec^2(xy)]+x\{\sec^2(xy)\,(1)+y[2x\sec(xy)\sec(xy)\tan(xy)]\}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\sec^2(xy)+\sec(xy)\tan(xy)+xy\sec(xy)\tan^2(xy)+xy\sec^3(xy)+$

$x\{\sec^2(xy)+2xy\sec^2(xy)\tan(xy)\}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x\sec^2(xy)+\sec(xy)\tan(xy)+xy\sec(xy)\tan^2(xy)+xy\sec^3(xy)+$

$x\sec^2(xy)+2x^2y\sec^2(xy)\tan(xy)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mathbf{2x\sec^2(xy) + \sec(xy)\tan(xy) + xy\sec(xy)\tan^2(xy) + xy\sec^3(xy) +}$

$\mathbf{2x^2y\sec^2(xy)\tan(xy)}$

$N(x,y) = x\sec(xy)\tan(xy) + x^2\sec^2(xy)$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[x\sec(xy)\tan(xy) + x^2\sec^2(xy)]$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x\sec(xy)\tan(xy)] + \frac{\partial}{\partial x}[x^2\sec^2(xy)]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sec(xy)\tan(xy)\frac{\partial}{\partial x}(x) + x\tan(xy)\frac{\partial}{\partial x}[\sec(xy)] + x\sec(xy)\frac{\partial}{\partial x}[\tan(xy)] +$

$\sec^2(xy)\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + x^2\frac{\partial}{\partial x}[\sec^2(xy)]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sec(xy)\tan(xy)\,(1) + x\tan(xy)\,[\text{ysec}(xy)\tan(xy)] + x\sec(xy)\,[y\sec^2(xy)] +$

$\sec^2(xy)\,(2x) + x^2[2y\sec(xy)\sec(xy)\tan(xy)]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sec(xy)\tan(xy) + xy\sec(xy)\tan^2(xy) + xy\sec^3(xy) + 2x\sec^2(xy) +$

$2x^2y\sec^2(xy)\tan(xy)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \mathbf{2x\sec^2(xy) + \sec(xy)\tan(xy) + xy\sec(xy)\tan^2(xy) + xy\sec^3(xy) +}$

$\mathbf{2x^2y\sec^2(xy)\tan(xy)}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$[1 + \tan(xy) + \text{ysec}(xy)\tan(xy) + xy\sec^2(xy)]dx + [x\sec(xy)\tan(xy) + x^2\sec^2(xy)]dy = 0$

$dx + \tan(xy)\,dx + \text{ysec}(xy)\tan(xy)dx + xy\sec^2(xy)\,dx + x\sec(xy)\tan(xy)dy +$

$x^2\sec^2(xy)\,dy = 0$

$dx + [y\sec(xy)\tan(xy)\,dx + x\sec(xy)\tan(xy)\,dy] + [\tan(xy)\,dx + xy\sec^2(xy)\,dx +$

$x^2\sec^2(xy)\,dy] = 0$

$d(x) + d[\sec(xy)] + d[x\tan(xy)] = d(C)$

$d[x + \sec(xy) + x\tan(xy)] = d(C)$

$\int d[x + \sec(xy) + x\tan(xy)] = \int d(C)$

$\boldsymbol{x + \sec(xy) + x\tan(xy) = C}$, solución general de la ED.

12. $(2xe^y + y^2e^x + 2x)dx + (x^2e^y + 2ye^x)dy = 0$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = 2xe^y + y^2e^x + 2x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xe^y + y^2e^x + 2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x\frac{\partial}{\partial y}(e^y) + e^x\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x(e^y) + e^x(2y) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xe^y + 2e^xy}$

$N(x,y) = x^2e^y + 2ye^x$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y + 2ye^x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 2y\frac{\partial}{\partial x}(e^x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y(2x) + 2y(e^x)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xe^y + 2e^xy}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$(2xe^y + y^2e^x + 2x)dx + (x^2e^y + 2ye^x)dy = 0$

$2xe^ydx + y^2e^xdx + 2xdx + x^2e^ydy + 2ye^xdy = 0$

$(2xe^ydx + x^2e^ydy) + (y^2e^xdx + 2ye^xdy) + 2xdx = 0$

$d(x^2e^y) + d(y^2e^x) + d(x^2) = d(C)$

$d(x^2e^y + y^2e^x + x^2) = d(C)$

$\int d(x^2e^y + y^2e^x + x^2) = \int d(C)$

$\boldsymbol{x^2e^y + y^2e^x + x^2 = C}$, solución general de la ED.

13. $(\sin y - 2x\cos^2 y)dx + x\cos y\,(2x\sin y + 1)dy = 0$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = \sin y - 2x\cos^2 y$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y - 2x\cos^2 y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y) - 2x\frac{\partial}{\partial y}(\cos^2 y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos y - 2x(2\cos y)\frac{\partial}{\partial y}(\cos y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos y - 2x(2\cos y)(-\sin y)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos y + 4x\sin y\cos y}$

$N(x,y) = x\cos y\,(2x\sin y + 1)$

$N(x,y) = 2x^2\sin y\cos y + x\cos y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2\sin y\cos y + x\cos y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin y\cos y\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \cos y\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin y\cos y\,(2x) + \cos y\,(1)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4x\sin y\cos y + \cos y$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y + 4x\sin y\cos y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$(\sin y - 2x\cos^2 y)dx + x\cos y\,(2x\sin y + 1)dy = 0$

$\sin y\,dx - 2x\cos^2 y\,dx + 2x^2\sin y\cos y\,dy + x\cos y\,dy = 0$

$(\sin y\,dx + x\cos y\,dy) + (-2x\cos^2 y\,dx + 2x^2\sin y\cos y\,dy) = 0$

$d(x\sin y) + d(-x^2\cos^2 y) = d(C)$

$d(x\sin y - x^2\cos^2 y) = d(C)$

$\int d(x\sin y - x^2\cos^2 y) = \int d(C)$

$\boldsymbol{x\sin y - x^2\cos^2 y = C}$, solución general de la ED.

14. $(3x^2y^2 - y^3 + 2x)dx + (2x^3y - 3xy^2 + 1)dy = 0; \quad y(-2) = 1$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = 3x^2y^2 - y^3 + 2x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - y^3 + 2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x^2(2y) - (3y^2) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 6x^2y - 3y^2}$

$N(x,y) = 2x^3y - 3xy^2 + 1$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y - 3xy^2 + 1)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - 3y^2\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(1)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y(3x^2) - 3y^2(1) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 6x^2y - 3y^2}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta, Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$(3x^2y^2 - y^3 + 2x)dx + (2x^3y - 3xy^2 + 1)dy = 0$

$3x^2y^2dx - y^3dx + 2xdx + 2x^3ydy - 3xy^2dy + dy = 0$

$(3x^2y^2dx + 2x^3ydy) - (y^3dx + 3xy^2dy) + 2xdx + dy = 0$

$d(x^3y^2) - d(xy^3) + d(x^2) + d(y) = d(C)$

$d(x^3y^2 - xy^3 + x^2 + y) = d(C)$

$\int d(x^3y^2 - xy^3 + x^2 + y) = \int d(C)$

$x^3y^2 - xy^3 + x^2 + y = C$, solución general de la ED.

Calculemos la solución particular de la ED para $x = -2$, $y = 1$.

$(-2)^3(1)^2 - (-2)(1)^3 + (-2)^2 + 1 = C$

$-8(1) - (-2)(1) + 4 + 1 = C$

$-8 + 2 + 5 = C$

$-1 = C$

$C = -1$

$x^3y^2 - xy^3 + x^2 + y = -1$

$\boldsymbol{x^3y^2 - xy^3 + x^2 + y + 1 = 0}$, solución particular de la ED.

15. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y \sin x - x^3 + \ln y)dy = 0; \quad y(0) = e$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = y^2 \cos x - 3x^2y - 2x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x \frac{\partial}{\partial y}(y^2) - 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x\,(2y) - 3x^2(1) - 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \cos x - 3x^2}$

$N(x,y) = 2y \sin x - x^3 + \ln y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2y \sin x - x^3 + \ln y)$

$\frac{\partial N(x.y)}{\partial x} = 2y \frac{\partial}{\partial x}(\sin x) - \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln y)$

$\frac{\partial N(x.y)}{\partial x} = 2y(\cos x) - (3x^2) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x.y)}{\partial x} = 2y \cos x - 3x^2}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x.y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y \sin x - x^3 + \ln y)dy = 0$

$y^2 \cos x\, dx - 3x^2ydx - 2xdx + 2y \sin x\, dy - x^3dy + \ln y\, dy = 0$

$(y^2 \cos x\, dx + 2y \sin x\, dy) - (3x^2ydx + x^3dy) - 2xdx + \ln y\, dy = 0$

$d(y^2 \sin x) - d(x^3y) - d(x^2) + d(y \ln y - y) = d(C)$

$d(y^2 \sin x - x^3y - x^2 + y \ln y - y) = d(C)$

$\int d(y^2 \sin x - x^3y - x^2 + y \ln y - y) = \int d(C)$

$y^2 \sin x - x^3y - x^2 + y \ln y - y = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = e$.

$e^2 \sin 0 - 0^3 \cdot e - 0^2 + e \ln e - e = C$

$e^2 \cdot 0 - 0 \cdot e + e \cdot 1 - e = C$

$e - e = C$

$0 = C$

$C = 0$

$\boldsymbol{y^2 \sin x - x^3 y - x^2 + y \ln y - y = 0}$, solución particular de la ED.

16. $\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right) dx + \left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right) dy = 0; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x, y) = \frac{1}{x} + ye^{xy}$ $\qquad$ $N(x, y) = \frac{1}{y} + xe^{xy}$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right)$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y}(y) + y \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0 + e^{xy} \frac{\partial}{\partial x}(x) + x \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{xy}(1) + y(xe^{xy})$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{xy}(1) + x(ye^{xy})$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right) dx + \left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right) dy = 0$

$$\frac{1}{x}dx + ye^{xy}dx + \frac{1}{y}dy + xe^{xy}dy = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + (ye^{xy}dx + xe^{xy}dy) = 0$$

$$\frac{ydx + xdy}{xy} + (ye^{xy}dx + xe^{xy}dy) = 0$$

$$d[\ln(xy)] + d(e^{xy}) = d(C)$$

$$d[\ln(xy) + e^{xy}] = d(C)$$

$$\int d[\ln(xy) + e^{xy}] = \int d(C)$$

$\ln(xy) + e^{xy} = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$.

$$\ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) + e^{\frac{1}{2}\cdot 2} = C$$

$$\ln(1) + e^{1} = C$$

$$0 + e = C$$

$$e = C$$

$$C = e$$

$$\ln(xy) + e^{xy} = e$$

Por lo tanto, $\mathbf{ln}(\boldsymbol{xy}) + \boldsymbol{e^{xy}} = \boldsymbol{e}$ es solución particular de la ED.

17. $\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)y'=y(y+\sin x);\quad y(0)=1$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$$\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)\frac{dy}{dx}=y(y+\sin x)$$

$$\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)dy=y(y+\sin x)dx$$

$$y(y+\sin x)dx=\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)dy$$

$$(y^2+y\sin x)dx-\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)dy=0$$

$$(y^2+y\sin x)dx+\left(-\frac{1}{1+y^2}-\cos x+2xy\right)dy=0$$

$$(y^2+y\sin x)dx+\left(2xy-\cos x-\frac{1}{1+y^2}\right)dy=0$$

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y)=y^2+y\sin x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2+y\sin x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\sin x\frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=(2y)+\sin x\,(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y+\sin x}$

$N(x,y)=2xy-\cos x-\frac{1}{1+y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy-\cos x-\frac{1}{1+y^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2y\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial x}(\cos x)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+y^2}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2y(1)-(-\sin x)-0$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2y+\sin x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$$(y^2 + y\sin x)dx + \left(2xy - \cos x - \frac{1}{1+y^2}\right)dy = 0$$

$$y^2dx + y\sin x\,dx + 2xydy - \cos x\,dy - \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

$$(y^2dx + 2xydy) + (y\sin x\,dx - \cos x\,dy) - \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

$$d(xy^2) + d(-y\cos x) - d(\tan^{-1} y) = d(C)$$

$$d(xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y) = d(C)$$

$$\int d(xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y) = \int d(C)$$

$xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 1$.

$$0 \cdot 1^2 - 1 \cdot \cos 0 - \tan^{-1} 1 = C$$

$$0 - 1 \cdot 1 - \frac{\pi}{4} = C$$

$$-1 - \frac{\pi}{4} = C$$

$$\frac{-4-\pi}{4} = C$$

$$C = \frac{-4-\pi}{4}$$

$$C = \frac{-\pi-4}{4} \quad \rightarrow \quad C = -\frac{\pi+4}{4}$$

$$xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y = -\frac{\pi+4}{4}$$

$$\boldsymbol{xy^2 - y\cos x - \tan^{-1} y + \frac{\pi+4}{4} = 0}$$

18. $(\cos x \cos y - \cot x)dx - \sin x \sin y \, dy = 0$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = \cos x \cos y - \cot x$

$N(x,y) = -\sin x \sin y$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x \cos y - \cot x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(\cot x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x \,(-\sin y) - 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\sin y \cos x}$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-\sin x \sin y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\sin y \frac{\partial}{\partial x}(\sin x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\sin y \,(\cos x)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\sin y \cos x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$(\cos x \cos y - \cot x)dx - \sin x \sin y \, dy = 0$

$\cos x \cos y \, dx - \cot x \, dx - \sin x \sin y \, dy = 0$

$(\cos x \cos y \, dx - \sin x \sin y \, dy) - \cot x \, dx = 0$

$d(\sin x \cos y) - d(\ln \sin x) = d(C)$

$d(\sin x \cos y - \ln \sin x) = d(C)$

$\int d(\sin x \cos y - \ln \sin x) = \int d(C)$

$\sin x \cos y - \ln \sin x = C$

$\sin x \cos y = \ln \sin x + C$

$\sin x \cos y = \ln \sin x + \ln K \,; \qquad \ln K = C$

$\boldsymbol{\sin x \cos y = \ln(K \sin x)}$, solución general de la ED.

19. $\left(\sin y+\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)dy=0$

Solución:

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y)=\sin y+\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin y+\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\sin y)+\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sin\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos y+\frac{1}{x^2}\left[\sin\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}(y)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\frac{y}{x}\right)\right]$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos y+\frac{1}{x^2}\left[\sin\frac{y}{x}(1)+y\cos\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos y+\frac{1}{x^2}\left[\sin\frac{y}{x}+y\cos\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos y+\frac{1}{x^2}\left[\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right]$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos y+\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}}$

$N(x,y)=x\cos y-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos y-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos y\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos y\,(1)-\left[\sin\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{y}{x}\right)\right]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos y-\left[\sin\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1})+\frac{1}{x}\cos\cos\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos y-\left[\sin\frac{y}{x}(-x^{-2})+\frac{1}{x}\cos\cos\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}y)\right]$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos y-\left[\sin\frac{y}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\cos\cos\frac{y}{x}(-x^{-2}y)\right]$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y - \left[-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\cos\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y - \left[-\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\cos\cos\frac{y}{x}\right]$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y + \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$$\left(\sin y + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$\sin y\,dx + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}dx + x\cos y\,dy - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}dy = 0$$

$$(\sin y\,dx + x\cos y\,dy) + \left(\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}dx - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}dy\right) = 0$$

$$d(x\sin y) + d\left(\cos\frac{y}{x}\right) = d(C)$$

$$d\left(x\sin y + \cos\frac{y}{x}\right) = d(C)$$

$$\int d\left(x\sin y + \cos\frac{y}{x}\right) = \int d(C)$$

$\boldsymbol{x\sin y + \cos\frac{y}{x} = C}$, solución general de la ED.

20. $\sin^{-1} y\,dx + (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(x + 2\sqrt{1-y^2}\cos y\right)dy = 0$

Solución:

$$\sin^{-1} y\,dx + (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(x + 2\sqrt{1-y^2}\cos y\right)dy = 0$$

$$\sin^{-1} y\,dx + \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}\left(x + 2\sqrt{1-y^2}\cos y\right)dy = 0$$

$$\sin^{-1} y\,dx + \left(\frac{x}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot 2\sqrt{1-y^2}\cos y\right)dy = 0$$

$$\sin^{-1} y\, dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot 2\sqrt{1-y^2}\cos y\right) dy = 0$$

$$\sin^{-1} y\, dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + 2\cos y\right) dy = 0$$

Comprobamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = \sin^{-1} y$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin^{-1} y)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

$N(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + 2\cos y$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + 2\cos y\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(2\cos y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}(1) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED es exacta. Procedemos a eliminar paréntesis y agrupar términos.

$$\sin^{-1} y\, dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + 2\cos y\right) dy = 0$$

$$\sin^{-1} y\, dx + \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy + 2\cos y\, dy = 0$$

$$\left(\sin^{-1} y\, dx + \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy\right) + 2\cos y\, dy = 0$$

$$d(x\sin^{-1} y) + d(2\sin y) = d(C)$$

$$d(x\sin^{-1} y + 2\sin y) = d(C)$$

$$\int d(x\sin^{-1} y + 2\sin y) = d(C)$$

$\boldsymbol{x\sin^{-1} y + 2\sin y = C}$, solución general de la ED.

3.7 Método de factor integrante

3.7.1 Soluciones de EDO por método de factor integrante

• Comprobar si las ED son exactas. Convierta en exactas por el factor integrante. Determine la solución particular donde se presente una condición inicial.

1. $(5x^3 + 3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

Solución:

La ED está en la forma estándar, es decir: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Verificamos la exactitud.

Sea:

$M(x,y) = 5x^3 + 3xy + 2y^2$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(5x^3 + 3xy + 2y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3xy) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 3x\frac{\partial}{\partial y}(y) + 4y$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x(1) + 4y$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x + 4y}$

$N(x,y) = x^2 + 2xy$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xy)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED no es exacta.

Buscamos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x^2+2xy}[3x + 4y - (2x + 2y)]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x^2+2xy}[3x + 4y - 2x - 2y]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{x^2+2xy}[x+2y]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{x(x+2y)}[x+2y]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{x}$

Consideremos $f(x)=\frac{1}{x}$.

Así: $\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int \frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\ln x}$

$\boldsymbol{P}=x$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$x[(5x^3+3xy+2y^2)dx+(x^2+2xy)dy]=x\cdot 0$

$x(5x^3+3xy+2y^2)dx+x(x^2+2xy)dy=0$

$(5x^4+3x^2y+2xy^2)dx+(x^3+2x^2y)dy=0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$5x^4dx+3x^2ydx+2xy^2dx+x^3dy+2x^2ydy=0$

$5x^4dx+(3x^2ydx+x^3dy)+(2xy^2dx+2x^2ydy)=0$

$d(x^5)+d(x^3y)+d(x^2y^2)=d(C)$

$d(x^5+x^3y+x^2y^2)=d(C)$

$\int d(x^5+x^3y+x^2y^2)=\int d(C)$

$\boldsymbol{x^5+x^3y+x^2y^2=C}$, solución general de la ED.

2. $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y\, dy = 0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Verificamos la exactitud de la ED.

Sea:

$M(x,y) = x + \sin x + \sin y$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x + \sin x + \sin y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 0 + \cos y$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos y}$

$N(x,y) = \cos y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED no es exacta.

Buscaremos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\cos y}[\cos y - 0]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\cos y}[\cos y]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = 1$

Consideremos $f(x) = 1$.

Así: $\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{x}$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$e^{x}[(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y\, dy] = e^{x} \cdot 0$

$e^x(x+\sin x+\sin y)dx+e^x\cos y\,dy=0$

$(xe^x+e^x\sin x+e^x\sin y)dx+e^x\cos y\,dy=0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$(xe^x+e^x\sin x+e^x\sin y)dx+e^x\cos y\,dy=0$

$xe^xdx+e^x\sin x\,dx+e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy=0$

$xe^xdx+e^x\sin x\,dx+(e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy)=0$

$d(xe^x-e^x)+d\left(\frac{1}{2}[e^x\sin x-e^x\cos x]\right)+d(e^x\sin y)=d(C)$

$d\left(xe^x-e^x+\frac{1}{2}[e^x\sin x-e^x\cos x]+e^x\sin y\right)=d(C)$

$\int d\left(xe^x-e^x+\frac{1}{2}[e^x\sin x-e^x\cos x]+e^x\sin y\right)=\int d(C)$

$xe^x-e^x+\dfrac{1}{2}[e^x\sin x-e^x\cos x]+e^x\sin y=C$

$2\left(xe^x-e^x+\frac{1}{2}[e^x\sin x-e^x\cos x]+e^x\sin y\right)=2C$

$2xe^x-2e^x+e^x\sin x-e^x\cos x+2e^x\sin y=K;\quad K=2C$

$\boldsymbol{2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=K}$, solución general de la ED.

3. $(3x^2+3y^2)dx+(x^3+3xy^2+6xy)dy=0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. Verificamos la exactitud.

Sea:

$M(x,y)=3x^2+3y^2$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+3y^2)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(3y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 3\frac{\partial}{\partial y}(y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3(2y)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 6y}$

$N(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 6xy$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 3xy^2 + 6xy)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}(6xy)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2\frac{\partial}{\partial x}(x) + 6y\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2(1) + 6y(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 + 6y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x^3+3xy^2+6xy}[6y - (3x^2 + 3y^2 + 6y)]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x^3+3xy^2+6xy}[6y - 3x^2 - 3y^2 - 6y]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x^3+3xy^2+6xy}[-3x^2 - 3y^2]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x(x^2+3y^2 6y)}[-3(x^2 + y^2)]$ (No es función sólo de x)

¿**P** es función sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{3x^2+3y^2}[3x^2 + 3y^2 + 6y - 6y]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{3x^2+3y^2}[3x^2 + 3y^2]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = 1$

Consideremos $g(y) = 1$.

Así: $\boldsymbol{P} = e^{\int g y dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1 dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{y}$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$e^{y}[(3x^2 + 3y^2)dx + (x^3 + 3xy^2 + 6xy)dy] = e^{y} \cdot 0$

$e^{y}(3x^2 + 3y^2)dx + e^{y}(x^3 + 3xy^2 + 6xy)dy = 0$

$(3x^2e^{y} + 3y^2e^{y})dx + (x^3e^{y} + 3xy^2e^{y} + 6xye^{y})dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$(3x^2e^{y} + 3y^2e^{y})dx + (x^3e^{y} + 3xy^2e^{y} + 6xye^{y})dy = 0$

$3x^2e^{y}dx + 3y^2e^{y}dx + x^3e^{y}dy + 3xy^2e^{y}dy + 6xye^{y}dy = 0$

$(3x^2e^{y}dx + x^3e^{y}dy) + (3y^2e^{y}dx + 3xy^2e^{y}dy + 6xye^{y}dy) = 0$

$d(x^3e^{y}) + d(3xy^2e^{y}) = d(C)$

$d(x^3e^{y} + 3xy^2e^{y}) = d(C)$

$\int d(x^3e^{y} + 3xy^2e^{y}) = \int d(C)$

$\boldsymbol{x^3e^{y} + 3xy^2e^{y} = C}$, solución general de la ED.

4. $xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x + (y^{-1}\tan x)y' = 0$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x + (y^{-1}\tan x)y' = 0$

$$xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x + (y^{-1}\tan x)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$dx\left[xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x + (y^{-1}\tan x)\frac{dy}{dx}\right] = dx \cdot 0$$

$$(xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x)dx + (y^{-1}\tan x)\frac{dy}{dx}\cdot dx = 0$$

$$(xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x)dx + (y^{-1}\tan x)dy = 0 \quad (*)$$

Sea:

$$M(x,y) = xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1} + \sec^2 x + y^{-1}\tan x)$$ Derivada parcial con respecto a y.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sec^2 x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^{-1}\tan x)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1}) + 0 + \tan x\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1})$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x(-y^{-2}) + \tan x\,(-y^{-2})$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -xy^{-2} - y^{-2}\tan x}$$

$$N(x,y) = y^{-1}\tan x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^{-1}\tan x)$$ Derivada parcial con respecto a x.

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(\tan x)$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y^{-1}\sec^2 x}$$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{y^{-1}\tan x}[-xy^{-2} - y^{-2}\tan x - (y^{-1}\sec^2 x)]$$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{y^{-1}\tan x}[-xy^{-2}-y^{-2}\tan x-y^{-1}\sec^2 x]$ (No es función sólo de x).

¿**P** es función sólo de y?

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{xy^{-1}+\sec^2 x+y^{-1}\tan x}[y^{-1}\sec^2 x-(-xy^{-2}-y^{-2}\tan x)]$$

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{xy^{-1}+\sec^2 x+y^{-1}\tan x}[y^{-1}\sec^2 x+xy^{-2}+y^{-2}\tan x]$$

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{xy^{-1}+\sec^2 x+y^{-1}\tan x}[xy^{-2}+y^{-1}\sec^2 x+y^{-2}\tan x]$$

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{xy^{-1}+\sec^2 x+y^{-1}\tan x}y^{-1}[xy^{-1}+\sec^2 x+y^{-1}\tan x]$$

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=y^{-1}$$

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{y}$$

Consideremos $g(y)=\frac{1}{y}$.

Así: $\boldsymbol{P}=e^{\int g(y)dy}$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{y}dy}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln y}$$

$$\boldsymbol{P}=y$$

Luego, multiplicamos **P** en la ED (*).

$$y[(xy^{-1}+\sec^2 x+y^{-1}\tan x)dx+(y^{-1}\tan x)dy]=y\cdot 0$$

$$y(xy^{-1}+\sec^2 x+y^{-1}\tan x)dx+y(y^{-1}\tan x)dy=0$$

$$(xyy^{-1}+y\sec^2 x+yy^{-1}\tan x)dx+(yy^{-1}\tan x)dy=0$$

$$(xy^{1-1}+y\sec^2 x+y^{1-1}\tan x)dx+(y^{1-1}\tan x)dy=0$$

$$(xy^{0}+y\sec^2 x+y^{0}\tan x)dx+(y^{0}\tan x)dy=0$$

$$(x\cdot 1+y\sec^2 x+1\cdot\tan x)dx+(1\cdot\tan x)dy=0$$

$(x + y\sec^2 x + \tan x)dx + \tan x\, dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$(x + y\sec^2 x + \tan x)dx + \tan x\, dy = 0$

$xdx + y\sec^2 x\, dx + \tan x\, dx + \tan x\, dy = 0$

$xdx + (y\sec^2 x\, dx + \tan x\, dy) + \tan x\, dx = 0$

$d\left(\frac{1}{2}x^2\right) + d(y\tan x) + d(-\ln|\cos x|) = d(C)$

$d\left(\frac{1}{2}x^2 + y\tan x - \ln|\cos x|\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{1}{2}x^2 + y\tan x - \ln|\cos x|\right) = \int d(C)$

$\frac{1}{2}x^2 + y\tan x - \ln|\cos x| = C$

$2\left[\frac{1}{2}x^2 + y\tan x - \ln|\cos x| = C\right]$

$x^2 + 2y\tan x - 2\ln|\cos x| = 2C$

$\boldsymbol{x^2 + 2y\tan x - 2\ln|\cos x| = K}$; $\quad K = 2C$, solución general de la ED (*).

5. $\left(2\sin y - \sin x + \frac{1}{x}\cos x\right)dx + \left(\frac{1}{y}\cos x + x\cos y + \frac{x}{y}\sin y\right)dy = 0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Verificamos la exactitud.

Sea:

$M(x,y) = 2\sin y - \sin x + \frac{1}{x}\cos x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\sin y - \sin x + \frac{1}{x}\cos x\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\cos x\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial y}(\sin y) - 0 + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\cos y}$

$N(x,y) = \frac{1}{y}\cos x + x\cos y + \frac{x}{y}\sin y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cos x + x\cos y + \frac{x}{y}\sin y\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cos x\right) + \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\sin y\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}(\cos x) + \cos y\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{1}{y}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y}(-\sin x) + \cos y\,(1) + \frac{1}{y}\sin y\,(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{y}\sin x + \cos y + \frac{1}{y}\sin y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\frac{1}{y}\cos x + x\cos y + \frac{x}{y}\sin y}\left[2\cos y - \left(-\frac{1}{y}\sin x + \cos y + \frac{1}{y}\sin y\right)\right]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\frac{1}{y}\cos x + x\cos y + \frac{x}{y}\sin y}\left[2\cos y + \frac{1}{y}\sin x - \cos y - \frac{1}{y}\sin y\right]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\frac{1}{y}\cos x + x\cos y + \frac{x}{y}\sin y}\left[\cos y + \frac{1}{y}\sin x - \frac{1}{y}\sin y\right]$ (No es función sólo de x)

¿**P** es función sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{2\sin y - \sin x + \frac{1}{x}\cos x}\left[-\frac{1}{y}\sin x + \cos y + \frac{1}{y}\sin y - 2\cos y\right]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{2\sin y - \sin x + \frac{1}{x}\cos x}\left[-\frac{1}{y}\sin x + \frac{1}{y}\sin y - \cos y\right]$ (No es función sólo de y)

Luego, **P** no es función de x, ni de y.

¿**P** será función de xy?

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{-\frac{1}{y}\sin x+\cos y+\frac{1}{y}\sin y-2\cos y}{x\left(2\sin y-\sin x+\frac{1}{x}\cos x\right)-y\left(\frac{1}{y}\cos x+x\cos y+\frac{x}{y}\sin y\right)}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{-\frac{1}{y}\sin x+\frac{1}{y}\sin y-\cos y}{2x\sin y-x\sin x+\cos x-\cos x-xy\cos y-x\sin y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{-\frac{1}{y}\sin x+\frac{1}{y}\sin y-\cos y}{x\sin y-x\sin x-xy\cos y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{\frac{-\sin x+\sin y-y\cos y}{y}}{x(\sin y-\sin x-y\cos y)}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{\frac{-\sin x+\sin y-y\cos y}{y}}{x(-\sin x+\sin y-y\cos y)}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{(-\sin x+\sin y-y\cos y)}{y}\cdot\frac{1}{x(-\sin x+\sin y-y\cos y)}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{1}{xy}$$

Consideremos: $b(u)=\frac{1}{u}$ $\qquad\qquad (u=xy)$

Así: $\boldsymbol{P}=e^{\int b(u)du}$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{u}du}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln u}$$

$$\boldsymbol{P}=u$$

$$\boldsymbol{P}=xy$$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$$xy\left[\left(2\sin y-\sin x+\frac{1}{x}\cos x\right)dx+\left(\frac{1}{y}\cos x+x\cos y+\frac{x}{y}\sin y\right)dy\right]=xy\cdot 0$$

$$xy\left(2\sin y-\sin x+\frac{1}{x}\cos x\right)dx+xy\left(\frac{1}{y}\cos x+x\cos y+\frac{x}{y}\sin y\right)dy=0$$

$(2xy\sin y - \text{xysin}\, x + y\cos x)dx + (x\cos x + x^2 y\cos y + x^2\sin y)dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$(2xy\sin y - \text{xysin}\, x + y\cos x)dx + (x\cos x + x^2 y\cos y + x^2\sin y)dy = 0$

$2xy\sin y\, dx - \text{xysin}\, x\, dx + y\cos x\, dx + x\cos x\, dy + x^2 y\cos y\, dy + x^2\sin y\, dy = 0$

$(y\cos x\, dx - \text{xysin}\, x\, dx + x\cos x\, dy) + (2xy\sin y\, dx + x^2\sin y\, dy + x^2 y\cos y\, dy) = 0$

$d(xy\cos x) + d(x^2 y\sin y) = d(C)$

$d(xy\cos x + x^2 y\sin y) = d(C)$

$\int d(xy\cos x + x^2 y\sin y) = \int d(C)$

$\boldsymbol{xy\cos x + x^2 y\sin y = C}$, solución general de la ED.

6. $\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right)dx + x^2 dy = 0$

Solución:

La ED está en la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Verificamos la exactitud.

Sea:

$M(x,y) = xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(1) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{e^{xy}}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial y}(y) + 0 + 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{e^{xy}}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x(1) + 2x\left(-x\frac{1}{e^{xy}}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x - \frac{2x^2}{e^{xy}}}$

$N(x,y) = x^2$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x^2}\left[x - \frac{2x^2}{e^{xy}} - 2x\right]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x^2}\left[-\frac{2x^2}{e^{xy}} - x\right]$ (No es función de x)

¿**P** es función sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{xy+1+\frac{2x}{e^{xy}}}\left[2x - \left(x - \frac{2x^2}{e^{xy}}\right)\right]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{xy+1+\frac{2x}{e^{xy}}}\left[2x - x + \frac{2x^2}{e^{xy}}\right]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{xy+1+\frac{2x}{e^{xy}}}\left[x + \frac{2x^2}{e^{xy}}\right]$ (No es función de y)

Luego, **P** no es función de x, ni de y.

¿**P** será función de xy?

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny} = \frac{2x-\left(x-\frac{2x^2}{e^{xy}}\right)}{x\left(xy+1+\frac{2x}{e^{xy}}\right)-y(x^2)}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny} = \frac{2x-x+\frac{2x^2}{e^{xy}}}{x^2y+x+\frac{2x^2}{e^{xy}}-x^2y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny} = \frac{x+\frac{2x^2}{e^{xy}}}{x+\frac{2x^2}{e^{xy}}}$$

$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny} = 1$

Consideremos $b(u) = 1$ $(u = xy)$

Así: $\boldsymbol{P} = e^{\int b(u)du}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1du}$

$\boldsymbol{P} = e^{u}$

$\boldsymbol{P} = e^{xy}$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$e^{xy}\left[\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right)dx + x^2dy\right] = e^{xy} \cdot 0$

$e^{xy}\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right)dx + e^{xy}x^2dy = 0$

$\left(xye^{xy} + e^{xy} + \frac{2x}{e^{xy}}e^{xy}\right)dx + x^2e^{xy}dy = 0$

$(xye^{xy} + e^{xy} + 2x)dx + x^2e^{xy}dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$(xye^{xy} + e^{xy} + 2x)dx + x^2e^{xy}dy = 0$

$xye^{xy}dx + e^{xy}dx + 2xdx + x^2e^{xy}dy = 0$

$(e^{xy}dx + xye^{xy}dx + x^2e^{xy}dy) + 2xdx = 0$

$d(xe^{xy}) + d(x^2) = d(C)$

$d(xe^{xy} + x^2) = d(C)$

$\int d(xe^{xy} + x^2) = \int d(C)$

$\boldsymbol{xe^{xy} + x^2 = C}$, solución general de la ED.

7. $(2y + 3x^2y^3)dx + (3x + 5x^3y^2)dy = 0$

Solución:

Consideremos $\boldsymbol{P} = x^m y^n$ un factor integrante.

$x^m y^n[(2y + 3x^2y^3)dx + (3x + 5x^3y^2)dy] = x^m y^n \cdot 0$

$x^m y^n(2y + 3x^2y^3)dx + x^m y^n(3x + 5x^3y^2)dy = 0$

$(2yx^m y^n + 3x^2y^3x^m y^n)dx + (3xx^m y^n + 5x^3y^2x^m y^n)dy = 0$

$(2x^m y^{n+1} + 3x^{m+2}y^{n+3})dx + (3x^{m+1}y^n + 5x^{m+3}y^{n+2})dy = 0$

Sea:

$M(x, y) = 2x^m y^{n+1} + 3x^{m+2}y^{n+3}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^m y^{n+1} + 3x^{m+2}y^{n+3})$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^m y^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^{m+2}y^{n+3})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x^m \frac{\partial}{\partial y}(y^{n+1}) + 3x^{m+2}\frac{\partial}{\partial y}(y^{n+3})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x^m[(n + 1)y^n] + 3x^{m+2}[(n + 3)y^{n+2}]$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2(n + 1)x^m y^n + 3(n + 3)x^{m+2}y^{n+2}}$

$N(x, y) = 3x^{m+1}y^n + 5x^{m+3}y^{n+2}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^{m+1}y^n + 5x^{m+3}y^{n+2})$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^{m+1}y^n) + \frac{\partial}{\partial x}(5x^{m+3}y^{n+2})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3y^n \frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1}) + 5y^{n+2}\frac{\partial}{\partial x}(x^{m+3})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3y^n[(m + 1)x^m] + 5y^{n+2}[(m + 3)x^{m+2}]$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3(m + 1)x^m y^n + 5(m + 3)x^{m+2}y^{n+2}}$

$\begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2(n+1)\boldsymbol{x^m y^n} + 3(n+3)\boldsymbol{x^{m+2} y^{n+2}} \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3(m+1)\boldsymbol{x^m y^n} + 5(m+3)\boldsymbol{x^{m+2} y^{n+2}} \end{cases}$, donde la variable x e y deben ser iguales.

Para que $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, debe ocurrir que, sus coeficientes también deben ser iguales.

$2(n+1) = 3(m+1) \quad \wedge \quad 3(n+3) = 5(m+3)$

$2n + 2 = 3m + 3 \quad \wedge \quad 3n + 9 = 5m + 15$

$3m - 2n = 2 - 3 \quad \wedge \quad 5m - 3n = 9 - 15$

$3m - 2n = -1 \quad \wedge \quad 5m - 3n = -6$

Formamos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3m - 2n = -1 \\ 5m - 3n = -6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de reducción.

$$\begin{cases} (3m - 2n = -1)(3) \\ (5m - 3n = -6)(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9m - 6n = -3 \\ -10m + 6n = 12 \end{cases}$$

$-m = 9$

$-1(-m = 9)$

$m = -9$

$3m - 2n = -1$

$3(-9) - 2n = -1$

$-27 - 2n = -1$

$-2n = -1 + 27$

$-2n = 26$

$n = \frac{26}{-2}$

$n = -13$

Luego, $\boldsymbol{P} = x^{-9}y^{-13}$. Multiplicamos **P** en la ED.

$x^{-9}y^{-13}[(2y + 3x^2y^3)dx + (3x + 5x^3y^2)dy] = x^{-9}y^{-13} \cdot 0$

$x^{-9}y^{-13}(2y + 3x^2y^3)dx + x^{-9}y^{-13}(3x + 5x^3y^2)dy = 0$

$(2yx^{-9}y^{-13} + 3x^2y^3x^{-9}y^{-13})dx + (3xx^{-9}y^{-13} + 5x^3y^2x^{-9}y^{-13})dy = 0$

$(2x^{-9}y^{-12} + 3x^{-7}y^{-10})dx + (3x^{-8}y^{-13} + 5x^{-6}y^{-11})dy = 0$, es una ED exacta.

Resolveos la ED mediante diferenciales.

$(2x^{-9}y^{-12} + 3x^{-7}y^{-10})dx + (3x^{-8}y^{-13} + 5x^{-6}y^{-11})dy = 0$

$2x^{-9}y^{-12}dx + 3x^{-7}y^{-10}dx + 3x^{-8}y^{-13}dy + 5x^{-6}y^{-11}dy = 0$

$(2x^{-9}y^{-12}dx + 3x^{-8}y^{-13}dy) + 3x^{-7}y^{-10}dx + 5x^{-6}y^{-11}dy = 0$

$d\left(-\frac{1}{4}x^{-8}y^{-12}\right) + d\left(-\frac{1}{2}x^{-6}y^{-10}\right) = d(C)$

$d\left(-\frac{1}{4}x^{-8}y^{-12} - \frac{1}{2}x^{-6}y^{-10}\right) = d(C)$

$\int d\left(-\frac{1}{4}x^{-8}y^{-12} - \frac{1}{2}x^{-6}y^{-10}\right) = \int d(C)$

$-\frac{1}{4}x^{-8}y^{-12} - \frac{1}{2}x^{-6}y^{-10} = C$

$-4\left[-\frac{1}{4}x^{-8}y^{-12} - \frac{1}{2}x^{-6}y^{-10} = C\right]$

$x^{-8}y^{-12} + 2x^{-6}y^{-10} = -4C$

$\boldsymbol{x^{-8}y^{-12} + 2x^{-6}y^{-10} = K}$; $K = -4C$, solución general de la ED.

8. $(-3y^4 + x^3y)dx + (xy^3 - 3x^4)dy = 0$

Solución:

Consideremos $\boldsymbol{P} = x^m y^n$ un factor integrante.

$x^m y^n[(-3y^4 + x^3y)dx + (xy^3 - 3x^4)dy] = x^m y^n \cdot 0$

$x^m y^n(-3y^4 + x^3y)dx + x^m y^n(xy^3 - 3x^4)dy = 0$

$(-3y^4x^my^n + x^3yx^my^n)dx + (xy^3x^my^n - 3x^4x^my^n)dy = 0$

$(-3x^my^{n+4} + x^{m+3}y^{n+1})dx + (x^{m+1}y^{n+3} - 3x^{m+4}y^n)dy = 0$

Sea:

$M(x,y) = -3x^m y^{n+4} + x^{m+3} y^{n+1}$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-3x^m y^{n+4} + x^{m+3} y^{n+1})$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-3x^m y^{n+4}) + \frac{\partial}{\partial y}(x^{m+3} y^{n+1})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -3x^m \frac{\partial}{\partial y}(y^{n+4}) + x^{m+3} \frac{\partial}{\partial y}(y^{n+1})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -3x^m[(n+4)y^{n+3}] + x^{m+3}[(n+1)y^n]$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -3(n+4)x^m y^{n+3} + (n+1)x^{m+3} y^n}$

$N(x,y) = x^{m+1} y^{n+3} - 3x^{m+4} y^n$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1} y^{n+3} - 3x^{m+4} y^n)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1} y^{n+3}) + \frac{\partial}{\partial x}(-3x^{m+4} y^n)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y^{n+3} \frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1}) - 3y^n \frac{\partial}{\partial x}(x^{m+4})$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y^{n+3}[(m+1)x^m] - 3y^n[(m+4)x^{m+3}]$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (m+1)x^m y^{n+3} - 3(m+4)x^{m+3} y^n}$

$\begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -3(n+4)\boldsymbol{x^m y^{n+3}} + (n+1)\boldsymbol{x^{m+3} y^n} \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (m+1)\boldsymbol{x^m y^{n+3}} - 3(m+4)\boldsymbol{x^{m+3} y^n} \end{cases}$, donde las variables x e y deben ser iguales.

Para que $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, debe ocurrir que, sus coeficientes también deben ser iguales.

$-3(n+4) = m+1 \quad \wedge \quad n+1 = -3(m+4)$

$-3n - 12 = m+1 \quad \wedge \quad n+1 = -3m - 12$

$m + 3n = -12 - 1 \quad \wedge \quad 3m + n = -12 - 1$

$m + 3n = -13 \qquad \wedge \qquad 3m + n = -13$

Formamos el siguiente sistema de ecuaciones.

$\begin{cases} m + 3n = -13 \\ 3m + n = -13 \end{cases}$ Resolviendo el sistema por el método de reducción.

$\begin{cases} (m + 3n = -13)(-1) \\ (3m + n = -13)(3) \end{cases}$

$\begin{cases} -m - 3n = 13 \\ 9m + 3n = -39 \end{cases}$

$8m = -26$

$m = \frac{-26}{8}$

$m = -\frac{13}{4}$

$3m + n = -13$

$3\left(-\frac{13}{4}\right) + n = -13$

$-\frac{39}{4} + n = -13$

$n = -13 + \frac{39}{4}$

$n = -\frac{13}{4}$

Luego, $\boldsymbol{P} = x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}}$. Multiplicamos **P** en la ED.

$x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}}[(-3y^4 + x^3y)dx + (xy^3 - 3x^4)dy] = x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}} \cdot 0$

$x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}}(-3y^4 + x^3y)dx + x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}}(xy^3 - 3x^4)dy = 0$

$\left(-3y^4x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}} + x^3yx^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}}\right)dx + \left(xy^3x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}} - 3x^4x^{-\frac{13}{4}}y^{-\frac{13}{4}}\right)dy = 0$

$\left(-3x^{-\frac{13}{4}}y^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{9}{4}}\right)dx + \left(x^{-\frac{9}{4}}y^{-\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{13}{4}}\right)dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$\left(-3x^{-\frac{13}{4}}y^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{9}{4}}\right)dx + \left(x^{-\frac{9}{4}}y^{-\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{13}{4}}\right)dy = 0$

$-3x^{-\frac{13}{4}}y^{\frac{3}{4}}dx + x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{9}{4}}dx + x^{-\frac{9}{4}}y^{-\frac{1}{4}}dy - 3x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{13}{4}}dy = 0$

$\left(-3x^{-\frac{13}{4}}y^{\frac{3}{4}}dx + x^{-\frac{9}{4}}y^{-\frac{1}{4}}dy\right) + \left(x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{9}{4}}dx - 3x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{13}{4}}dy\right) = 0$

$d\left(\frac{4}{3}x^{-\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}}\right) + d\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{9}{4}}\right) = d(C)$

$d\left(\frac{4}{3}x^{-\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{9}{4}}\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{4}{3}x^{-\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{9}{4}}\right) = \int d(C)$

$\frac{4}{3}x^{-\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{9}{4}} = C$

$\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}x^{-\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{9}{4}} = C\right)$

$x^{-\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{9}{4}} = \frac{3C}{4}$

$x^{-\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{9}{4}} = K; \;\; K = \frac{3C}{4}$

$\frac{y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{9}{4}}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{9}{4}}} = K$

$\frac{y^3 + x^3}{x^{\frac{9}{4}}y^{\frac{9}{4}}} = K$

$\boldsymbol{x^3 + y^3 = Kx^{\frac{9}{4}}y^{\frac{9}{4}}}$, solución general de la ED.

9. $(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0$

Solución:

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = xy^2 + x^2y^2 + 3$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x^2y^2 + 3)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(3)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x(2y) + x^2(2y) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xy + 2x^2y}$

$N(x,y) = x^2y$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y(2x)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{x^2y}[2xy+2x^2y-2xy]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{x^2y}[2x^2y]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=2$

Consideremos $f(x)=2$.

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int 2dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{2\int dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{2x}$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$e^{2x}[(xy^2+x^2y^2+3)dx+x^2ydy]=e^{2x}\cdot 0$

$e^{2x}(xy^2+x^2y^2+3)dx+e^{2x}x^2ydy=0$

$(xy^2e^{2x}+x^2y^2e^{2x}+3e^{2x})dx+x^2ye^{2x}dy=0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$(xy^2e^{2x}+x^2y^2e^{2x}+3e^{2x})dx+x^2ye^{2x}dy=0$

$xy^2e^{2x}dx+x^2y^2e^{2x}dx+3e^{2x}dx+x^2ye^{2x}dy=0$

$(xy^2e^{2x}dx+x^2y^2e^{2x}dx+x^2ye^{2x}dy)+3e^{2x}dx=0$

$d\left(\frac{1}{2}x^2y^2e^{2x}\right)+d\left(\frac{3}{2}e^{2x}\right)=d(C)$

$d\left(\frac{1}{2}x^2y^2e^{2x}+\frac{3}{2}e^{2x}\right)=d(C)$

$\int d\left(\frac{1}{2}x^2y^2e^{2x}+\frac{3}{2}e^{2x}\right)=\int d(C)$

$\frac{1}{2}x^2y^2e^{2x} + \frac{3}{2}e^{2x} = C$

$2\left(\frac{1}{2}x^2y^2e^{2x} + \frac{3}{2}e^{2x} = C\right)$

$x^2y^2e^{2x} + 3e^{2x} = 2C$

$\boldsymbol{x^2y^2e^{2x} + 3e^{2x} = K}$; $\quad K = 2C$, solución general de la ED.

10. $y\sin(xy)\,dx - \left[\frac{\cos(xy)}{y} - x\sin(xy)\right]dy = 0$

Solución:

$y\sin xy\,dx - \left[\frac{\cos(xy)}{y} - x\sin(xy)\right]dy = 0$

$y\sin xy\,dx + \left[-\frac{\cos(xy)}{y} + x\sin(xy)\right]dy = 0$

$y\sin xy\,dx + \left[x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}\right]dy = 0$ (*)

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = y\sin(xy)$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\,(y\sin(xy))$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin(xy)\frac{\partial}{\partial y}(y) + y\frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy))$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin(xy)\,(1) + y(x\cos(xy))$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \sin(xy) + xy\cos(xy)}$

$N(x,y) = x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\sin(xy)) - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}(\cos(xy))$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sin(xy)\frac{\partial}{\partial x}(x) + x\frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy)) - \frac{1}{y}(-y\sin(xy))$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sin(xy)\,(1) + x(y\cos(xy)) + \sin(xy)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy) + \sin(xy)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\sin(xy) + xy\cos(xy)}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}}[\sin(xy) + xy\cos(xy) - (2\sin(xy) + xy\cos(xy))]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}}[\sin(xy) + xy\cos(xy) - 2\sin(xy) - xy\cos(xy)]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}}[-\sin(xy)]$ (No es función sólo de x)

¿**P** será función sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y\sin(xy)}[2\sin(xy) + xy\cos(xy) - (\sin(xy) + xy\cos(xy))]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y\sin(xy)}[2\sin(xy) + xy\cos(xy) - \sin(xy) - xy\cos(xy)]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y\sin(xy)}[\sin(xy)]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y}$

Consideremos $g(y) = \frac{1}{y}$.

$\boldsymbol{P} = e^{\int g(y)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{y}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln y}$

$\boldsymbol{P} = y$

Luego, multiplicamos **P** en la ED (*).

$y\left[y\sin(xy)\,dx + \left(x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}\right)dy\right] = y\cdot 0$

$y^2\sin(xy)\,dx + y\left(x\sin(xy) - \frac{\cos(xy)}{y}\right)dy = 0$

$y^2\sin(xy)\,dx + (x\,y\sin(xy) - \cos(xy))dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos mediante diferenciales.

$y^2\sin(xy)\,dx + (x\,y\sin(xy) - \cos(xy))dy = 0$

$y^2\sin(xy)\,dx + x\,y\sin(xy)\,dy - \cos(xy)\,dy = 0$

$d(-y\cos(xy)) = d(C)$

$\int d(-y\cos(xy)) = \int d(C)$

$-y\cos(xy) = C$

$-(-y\cos(xy) = C)$

$y\cos(xy) = -C$

$\boldsymbol{y\cos xy = K}$; $\quad K = -C$, solución general de la ED.

11. $(y + y\ln|xy| + 2xy)dx + (x - 2y^2)dy = 0$

Solución:

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = y + y\ln|xy| + 2xy$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y + y\ln|xy| + 2xy)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(y\ln|xy|) + 2x\frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = (1) + \ln|xy| \frac{\partial}{\partial y}(y) + y\frac{\partial}{\partial y}(\ln|xy|) + 2x(1)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 + \ln|xy|\,(1) + y\left(\frac{1}{xy} \cdot x\right) + 2x$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 + \ln|xy| + 1 + 2x$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2 + \ln|xy| + 2x}$

$N(x,y) = x - 2y^2$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2y^2)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(2y^2)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (1) - 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x-2y^2}[2 + \ln|xy| + 2x - 1]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x-2y^2}[1 + \ln|xy| + 2x]$ (No es función sólo de x)

¿**P** será función sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y + y\ln|xy| + 2xy}[1 - (2 + \ln|xy| + 2x)]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y + y\ln|xy| + 2xy}[1 - 2 - \ln|xy| - 2x]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y + y\ln|xy| + 2xy}[-1 - \ln|xy| - 2x]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{y(1 + \ln|xy| + 2x)}\{-[1 + \ln|xy| + 2x]\}$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=-\frac{1}{y}$

Consideremos $g(y)=-\frac{1}{y}$.

$\boldsymbol{P}=e^{\int g(y)dy}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int -\frac{1}{y}dy}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\int \frac{1}{y}dy}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\ln y}$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\ln y}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{y}$$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$$\frac{1}{y}[(y+y\ln|xy|+2xy)dx+(x-2y^2)dy]=\frac{1}{y}\cdot 0; \quad y\neq 0$$

$$\frac{1}{y}(y+y\ln|xy|+2xy)dx+\frac{1}{y}(x-2y^2)dy=0$$

$$\left(\frac{y}{y}+\frac{y\ln|xy|}{y}+\frac{2xy}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{y}-\frac{2y^2}{y}\right)dy=0$$

$(1+\ln|xy|+2x)dx+\left(\frac{x}{y}-2y\right)dy=0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$$(1+\ln|xy|+2x)dx+\left(\frac{x}{y}-2y\right)dy=0$$

$$dx+\ln|xy|\,dx+2xdx+\frac{x}{y}dy-2ydy=0$$

$$\left(\ln|xy|\,dx+dx+\frac{x}{y}dy\right)+2xdx-2ydy=0$$

$d(x\ln|xy|) + d(x^2) - d(y^2) = d(C)$

$d(x\ln|xy| + x^2 - y^2) = d(C)$

$\int d(x\ln|xy| + x^2 - y^2) = \int d(C)$

$\boldsymbol{x\ln|xy| + x^2 - y^2 = C}$, solución general de la ED.

12. $\left(\frac{y}{x^2} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln|xy|}{x}\right)dy = 0$

Solución:

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = \frac{y}{x^2} + 2$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2} + 2\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}(1) + 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}}$

$N(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{\ln|xy|}{x}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln|xy|}{x}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln|xy|}{x}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}) + \frac{x\frac{\partial}{\partial x}(\ln|xy|) - \ln|xy|\frac{\partial}{\partial x}(x)}{x^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (-x^{-2}) + \frac{x\left(\frac{y}{xy}\right) - \ln|xy|(1)}{x^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln|xy|}{x^2}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{-1 + 1 - \ln|xy|}{x^2}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{-\ln|xy|}{x^2}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{\ln|xy|}{x}}\left[\frac{1}{x^2}-\left(\frac{-\ln|xy|}{x^2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{\ln|xy|}{x}}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln|xy|}{x^2}\right]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{\ln|xy|}{x}}\cdot\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln|xy|}{x}\right]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{x}$$

Consideremos $f(x)=\frac{1}{x}$.

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x}$$

$$\boldsymbol{P}=x$$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$$x\left[\left(\frac{y}{x^2}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln|xy|}{x}\right)dy\right]=x\cdot 0$$

$$x\left(\frac{y}{x^2}+2\right)dx+x\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln|xy|}{x}\right)dy=0$$

$$\left(\frac{xy}{x^2}+2x\right)dx+\left(\frac{x}{x}+\frac{x\ln|xy|}{x}\right)dy=0$$

$\left(\frac{y}{x}+2x\right)dx+(1+\ln|xy|)dy=0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED por diferenciales.

$$\left(\frac{y}{x}+2x\right)dx+(1+\ln|xy|)dy=0$$

$$\frac{y}{x}dx+2xdx+dy+\ln|xy|\,dy=0$$

$\left(\frac{y}{x}dx + \ln|xy|\,dy + dy\right) + 2xdx = 0$

$d(y\ln|xy|) + d(x^2) = d(C)$

$d(y\ln|xy| + x^2) = d(C)$

$\int d(y\ln|xy| + x^2) = \int d(C)$

$\boldsymbol{y\ln xy + x^2 = C}$, solución general de la ED.

13. $\left(\frac{y}{2} + 5x^4y\sqrt{xy}\right)dx + \left(\frac{x}{2} + x^5\sqrt{xy}\right)dy = 0$

Solución:

$\left(\frac{y}{2} + 5x^4y\sqrt{xy}\right)dx + \left(\frac{x}{2} + x^5\sqrt{xy}\right)dy = 0$

$\left(\frac{y}{2} + 5x^4y(xy)^{\frac{1}{2}}\right)dx + \left(\frac{x}{2} + x^5(xy)^{\frac{1}{2}}\right)dy = 0$

$\left(\frac{y}{2} + 5x^4yx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dx + \left(\frac{x}{2} + x^5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy = 0$

$\left(\frac{y}{2} + 5x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(\frac{x}{2} + x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy = 0$

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = \frac{y}{2} + 5x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2} + 5x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(y) + 5x^{\frac{9}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\frac{3}{2}}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}(1) + 5x^{\frac{9}{2}}\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{15}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}}$

$N(x,y) = \frac{x}{2} + x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}+x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(x)+y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\frac{11}{2}}\right)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{2}(1)+y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{2}+\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\frac{x}{2}+x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{2}+\frac{15}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}+\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\frac{x}{2}+x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{2}+\frac{15}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\frac{x}{2}+x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\left[2x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]$ (No es función sólo de x)

¿**P** será función sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{\frac{y}{2}+5x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{2}+\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{\frac{y}{2}+5x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{2}+\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{15}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=\frac{1}{\frac{y}{2}+5x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}}\left[-2x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]$ (No es función sólo de y)

¿**P** será función de xy?

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\frac{y}{2}+5x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)x-\left(\frac{x}{2}+x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{15}{2}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{xy}{2}+5x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{3}{2}}-\frac{xy}{2}-x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{-2x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=-\frac{1}{2xy}$$

Consideremos: $b(u)=-\frac{1}{2u}$ $\qquad (u=xy)$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int b(u)du}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int -\frac{1}{2u}du}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{1}{2}\ln u}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln u}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\ln u^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Luego, multiplicamos la ED por **P**.

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}\left[\left(\frac{y}{2}+5x^4y\sqrt{xy}\right)dx+\left(\frac{x}{2}+x^5\sqrt{xy}\right)dy\right]=\frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}\left(\frac{y}{2}+5x^4y\sqrt{xy}\right)dx+\frac{1}{\sqrt{xy}}\left(\frac{x}{2}+x^5\sqrt{xy}\right)dy=0$$

$$\left(\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot 5x^4y\sqrt{xy}\right)dx+\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot x^5\sqrt{xy}\right)dy=0$$

$$\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}+5x^4y\right)dx+\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}+x^5\right)dy=0$$

$$\frac{y}{2\sqrt{xy}}dx+5x^4ydx+\frac{x}{2\sqrt{xy}}dy+x^5dy=0$$

$$\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}dx+\frac{x}{2\sqrt{xy}}dy\right)+(5x^4ydx+x^5dy)=0$$

$$d\left(\sqrt{xy}\right)+d(x^5y)=d(C)$$

$$d\left(\sqrt{xy}+x^5y\right)=d(C)$$

$$\int d\left(\sqrt{xy}+x^5y\right)=\int d(C)$$

$\boldsymbol{\sqrt{xy}+x^5y=C}$, solución general de la ED.

14. $y'=-\frac{y+\frac{1}{e^{xy}}}{x+e^{xy}}$; $y(0)=1$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+\frac{1}{e^{xy}}}{x+e^{xy}}$$

$$\left(x+\frac{1}{e^{xy}}\right)dy=-\left(y+\frac{1}{e^{xy}}\right)dx$$

$$\left(y+\frac{1}{e^{xy}}\right)dx+\left(x+\frac{1}{e^{xy}}\right)dy=0 \quad (*)$$

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = y + \frac{1}{e^{xy}}$ $\qquad\qquad$ $N(x,y) = x + \frac{1}{e^{xy}}$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{e^{xy}}\right)$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{1}{e^{xy}}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{e^{xy}}\right)$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^{xy}}\right)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = (1) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{-xy})$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (1) + \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 + (-xe^{-xy})$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 + (-ye^{-xy})$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 - xe^{-xy}}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 - ye^{-xy}}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

Observamos que **P** no es posible que sea función sólo de x, tampoco de y.

¿**P** será función de xy?

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} = \frac{1 - ye^{-xy} - (1 - xe^{-xy})}{\left(y + \frac{1}{e^{xy}}\right)x - \left(x + \frac{1}{e^{xy}}\right)y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} = \frac{1 - ye^{-xy} - 1 + xe^{-xy}}{xy + \frac{x}{e^{xy}} - xy - \frac{y}{e^{xy}}}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} = \frac{xe^{-xy} - ye^{-xy}}{\frac{x}{e^{xy}} - \frac{y}{e^{xy}}}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} = \frac{xe^{-xy} - ye^{-xy}}{xe^{-xy} - ye^{-xy}}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} = 1$$

Consideremos $b(u) = 1$ $\qquad\qquad$ $(u = xy)$

$\boldsymbol{P} = e^{\int b(u)du}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1du}$

$\boldsymbol{P} = e^{u}$

$\boldsymbol{P} = e^{xy}$

Luego, multiplicamos **P** en la ED (*).

$e^{xy}\left[\left(y + \frac{1}{e^{xy}}\right)dx + \left(x + \frac{1}{e^{xy}}\right)dy\right] = e^{xy} \cdot 0$

$e^{xy}\left(y + \frac{1}{e^{xy}}\right)dx + e^{xy}\left(x + \frac{1}{e^{xy}}\right)dy = 0$

$(ye^{xy} + 1)dx + (xe^{xy} + 1)dy = 0$, la ED es exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$ye^{xy}dx + dx + xe^{xy}dy + dy = 0$

$(ye^{xy}dx + xe^{xy}dy) + dx + dy = 0$

$d(e^{xy}) + d(x) + d(y) = d(C)$

$d(e^{xy} + x + y) = d(C)$

$\int d(e^{xy} + x + y) = \int d(C)$

$e^{xy} + x + y = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 1$.

$e^{0\cdot 1} + 0 + 1 = C$

$e^{0} + 1 = C$

$1 + 1 = C$

$2 = C \quad \rightarrow \quad C = 2$

$e^{xy} + x + y = 2$

$\boldsymbol{e^{xy} + x + y - 2 = 0}$, solución particular de la ED.

15. $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0; \qquad y(1) = -1$

Solución:

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = 2y^2 - 6xy$

$N(x,y) = 3xy - 4x^2$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2y^2 - 6xy)$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3xy - 4x^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial y}(y^2) - 6x\frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3y\frac{\partial}{\partial x}(x) - 4\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2(2y) - 6x(1)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3y(1) - 4(2x)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4y - 6x}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3y - 8x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{3xy - 4x^2}[4y - 6x - (3y - 8x)]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{3xy - 4x^2}[4y - 6x - 3y + 8x]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{3xy - 4x^2}[2x + y]$ (No es función sólo de x)

¿**P** será función de sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{2y^2 - 6xy}[3y - 8x - (4y - 6x)]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{2y^2 - 6xy}[3y - 8x - 4y + 6x]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{2y^2 - 6xy}[-2x - y]$ (No es función sólo de y)

¿**P** será función de xy?

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{3y-8x-(4y-6x)}{(2y^2-6xy)x-(3xy-4x^2)y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{3y-8x-4y+6x}{2xy^2-6x^2y-3xy^2+4x^2y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{-y-2x}{-xy^2-2x^2y}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{-y-2x}{xy(-y-2x)}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny}=\frac{1}{xy}$$

Consideremos $b(u)=\frac{1}{u}$ $\qquad$ $(u=xy)$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int b(u)du}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{u}du}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln u}$$

$$\boldsymbol{P}=u$$

$$\boldsymbol{P}=xy$$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$$xy[(2y^2-6xy)dx+(3xy-4x^2)dy]=xy\cdot 0$$

$$xy(2y^2-6xy)dx+xy(3xy-4x^2)dy=0$$

$(2xy^3-6x^2y^2)dx+(3x^2y^2-4x^3y)dy=0$, es una ED exacta.

Resolvemos la ED mediante diferenciales.

$$(2xy^3-6x^2y^2)dx+(3x^2y^2-4x^3y)dy=0$$

$$2xy^3dx-6x^2y^2dx+3x^2y^2dy-4x^3ydy=0$$

$$(2xy^3dx+3x^2y^2dy)-(6x^2y^2dx+4x^3ydy)=0$$

$d(x^2y^3) - d(2x^3y^2) = d(C)$

$d(x^2y^3 - 2x^3y^2) = d(C)$

$\int d(x^2y^3 - 2x^3y^2) = \int d(C)$

$x^2y^3 - 2x^3y^2 = C$, solución general de la ED.

Calculemos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = -1$.

$(1)^2(-1)^3 - 2(1)^3(-1)^2 = C$

$1 \cdot -1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = C$

$-1 - 2 = C$

$-3 = C \qquad \rightarrow \qquad C = -3$

$x^2y^3 - 2x^3y^2 = -3$

$\boldsymbol{x^2y^3 - 2x^3y^2 + 3 = 0}$, solución particular de la ED.

16. $(4x^{-1} + 3y^{-1} - 6)dx + (xy^{-2} - 6xy^{-1} + 12y^{-1})dy = 0; \quad y(1) = 1$

Solución:

Consideremos $\boldsymbol{P} = x^my^n$ un factor integrante. Multiplicamos **P** en la ED.

$x^my^n[(4x^{-1} + 3y^{-1} - 6)dx + (xy^{-2} - 6xy^{-1} + 12y^{-1})dy] = x^my^n \cdot 0$

$x^my^n(4x^{-1} + 3y^{-1} - 6)dx + x^my^n(xy^{-2} - 6xy^{-1} + 12y^{-1})dy = 0$

$(4x^{-1}x^my^n + 3y^{-1}x^my^n - 6x^my^n)dx + (xy^{-2}x^my^n - 6xy^{-1}x^my^n + 12y^{-1}x^my^n)dy = 0$

$(4x^{m-1}y^n + 3x^my^{n-1} - 6x^my^n)dx + (x^{m+1}y^{n-2} - 6x^{m+1}y^{n-1} + 12x^my^{n-1})dy = 0$

Sea:

$M(x,y) = 4x^{m-1}y^n + 3x^my^{n-1} - 6x^my^n$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^{m-1}y^n + 3x^my^{n-1} - 6x^my^n)$ Derivada parcial con respecto y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4x^{m-1}\frac{\partial}{\partial y}(y^n) + 3x^m\frac{\partial}{\partial y}(y^{n-1}) - 6x^m\frac{\partial}{\partial y}(y^n)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4x^{m-1}ny^{n-1} + 3x^m(n-1)y^{n-2} - 6x^m ny^{n-1}$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4nx^{m-1}y^{n-1} + 3(n-1)x^m y^{n-2} - 6nx^m y^{n-1}}$

$N(x,y) = x^{m+1}y^{n-2} - 6x^{m+1}y^{n-1} + 12x^m y^{n-1}$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1}y^{n-2} - 6x^{m+1}y^{n-1} + 12x^m y^{n-1})$ Derivada parcial con respecto x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y^{n-2}\frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1}) - 6y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1}) + 12y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^m)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y^{n-2}(m+1)x^m - 6y^{n-1}(m+1)x^m + 12y^{n-1}mx^{m-1}$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (m+1)x^m y^{n-2} - 6(m+1)x^m y^{n-1} + 12mx^{m-1}y^{n-1}$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 12mx^{m-1}y^{n-1} + (m+1)x^m y^{n-2} - 6(m+1)x^m y^{n-1}}$

$\begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4nx^{m-1}y^{n-1} + 3(n-1)x^m y^{n-2} - 6nx^m y^{n-1} \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 12mx^{m-1}y^{n-1} + (m+1)x^m y^{n-2} - 6(m+1)x^m y^{n-1} \end{cases}$ donde las variables x e y deben iguales.

Para que $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, debe ocurrir que, sus coeficientes también deben ser iguales.

$4n = 12m$	$3(n-1) = m+1$	$-6n = -6(m+1)$
$12m = 4n$	$m+1 = 3(n-1)$	$6(m+1) = 6n$
$3m = n$	$m+1 = 3n-3$	$m+1 = n$

Formamos el sistema de ecuaciones.

$\begin{cases} 3m = n & (1) \\ m+1 = 3n-3 & (2) \\ m+1 = n & (3) \end{cases}$ Resolviendo por el método de sustitución.

Igualamos la ecuación 1 y la 3 con la variable n.

$3m = m + 1$ $\quad$ $3m = n$

$3m - m = 1$ $\quad$ $n = 3m$

$2m = 1$ $\quad$ $n = 3\left(\frac{1}{2}\right)$

$m = \frac{1}{2}$ $\quad$ $n = \frac{3}{2}$

Nota: Se debe verificar que la segunda ecuación se satisface para los valores de $m = \frac{1}{2}$ y $n = \frac{3}{2}$, de lo contrario el sistema no tiene solución.

Entonces los valores de m y n es solución del sistema.

Luego, $\boldsymbol{P} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ es el factor integrante.

$$(4x^{m-1}y^n + 3x^m y^{n-1} - 6x^m y^n)dx + (x^{m+1}y^{n-2} - 6x^{m+1}y^{n-1} + 12x^m y^{n-1})dy = 0$$

Sustituyendo $m = \frac{1}{2}$ y $n = \frac{3}{2}$ en la ecuación para que sea exacta.

$$\left(4x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}-1} - 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(x^{\frac{1}{2}+1}y^{\frac{3}{2}-2} - 6x^{\frac{1}{2}+1}y^{\frac{3}{2}-1} + 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}-1}\right)dy = 0$$

$$\left(4x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)dx + \left(x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy = 0$$

$$4x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}dx + 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}dx - 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}dx + x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy - 6x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}dy + 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}dy = 0$$

$$\left(4x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}dx + 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}dy\right) + \left(3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}dx + x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy\right) - \left(6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}dx + 6x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}dy\right) = 0$$

$$d\left(8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right) + d\left(2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right) - d\left(4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right) = d(C)$$

$$d\left(8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right) = d(C)$$

$$\int d\left(8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right) = \int d(C)$$

$$8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = C$$

$$2\left(4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right) = C$$

$$4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = \frac{C}{2}$$

$$4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = K; \qquad K = \frac{C}{2}$$

Calculemos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = 1$.

$4(1)^{\frac{1}{2}}(1)^{\frac{3}{2}} + (1)^{\frac{3}{2}}(1)^{\frac{1}{2}} - 2(1)^{\frac{3}{2}}(1)^{\frac{3}{2}} = K$

$4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = K$

$4 + 1 - 2 = K$

$3 = K \qquad \rightarrow \quad K = 3$

$4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = 3$

$4x^{\frac{1}{2}}yy^{\frac{1}{2}} + xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2xyx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 3$

$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(4y + x - 2xy) = 3$

$(xy)^{\frac{1}{2}}(x - 2xy + 4y) = 3$

$\boldsymbol{\sqrt{xy}(x - 2xy + 4y) = 3}$, solución particular de la ED.

17. $(x + y)dx + \tan x\, dy = 0; \quad y(0) = 1$

Solución:

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x, y) = x + 1$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x + 1)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 1$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1}$

$N(x, y) = \tan x$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\tan x)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \sec^2 x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\tan x}[1 - \sec^2 x]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\tan x}[-\sec^2 x + 1]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\tan x}[-(\sec^2 x - 1)]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{\tan x}[-\tan^2 x]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -\tan x$

Consideremos $f(x) = -\tan x$.

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int -\tan x dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln \cos x}$

$\boldsymbol{P} = \cos x$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$\cos x\,[(x + y)dx + \tan x\, dy] = 0 \cdot \cos x$

$\cos x\,(x + y)dx + \cos x \tan x\, dy = 0$

$(x \cos x + y \cos x)dx + \cos x \tan x\, dy = 0$

$(x\cos x + y\cos x)dx + \cos x \frac{\sin x}{\cos x} dy = 0$

$(x\cos x + y\cos x)dx + \sin x\, dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos mediante diferenciales.

$(x\cos x + y\cos x)dx + \sin x\, dy = 0$

$x\cos x dx + y\cos x\, dx + \sin x\, dy = 0$

$(y\cos x\, dx + \sin x\, dy) + x\cos x dx = 0$

$d(y\sin x) + d(x\sin x + \cos x) = d(C)$

$d(y\sin x + x\sin x + \cos x) = d(C)$

$\int d(y\sin x + x\sin x + \cos x) = \int d(C)$

$y\sin x + x\sin x + \cos x = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 1$.

$1 \cdot \sin 0 + 0 \cdot \sin 0 + \cos 0 = C$

$1 \cdot 0 + 0 + 1 = C$

$0 + 1 = C$

$1 = C$

$C = 1$

$y\sin x + x\sin x + \cos x = 1$

$\boldsymbol{y\sin x + x\sin x + \cos x - 1 = 0}$

18. $2ydx + (x - \sin\sqrt{y})dy = 0$

Solución:

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = 2y$ $\qquad$ $N(x,y) = x - \sin\sqrt{y}$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2y)$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - \sin\sqrt{y})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial y}(y)$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(\sin\sqrt{y})$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2(1)$ $\qquad$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 - 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x - \sin\sqrt{y}}[2 - 1]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x - \sin\sqrt{y}}(1)$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x - \sin\sqrt{y}}$ (No es función sólo x)

¿**P** será función sólo de y?

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{2y}[1 - 2]$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = \frac{1}{2y}(-1)$

$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = -\frac{1}{2y}$

Consideremos $g(y) = -\frac{1}{2y}$.

$$\boldsymbol{P} = e^{\int g(y)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{1}{2y}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\ln y}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln y}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln y^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\left[2ydx + \left(x - \sin\sqrt{y}\right)dy\right] = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot 0$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot 2ydx + \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\left(x - \sin\sqrt{y}\right)dy = 0$$

$2y^{\frac{1}{2}}dx + \left(\frac{x}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin\sqrt{y}}{y^{\frac{1}{2}}}\right)dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos mediante diferenciales.

$$2y^{\frac{1}{2}}dx + \left(\frac{x}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin\sqrt{y}}{y^{\frac{1}{2}}}\right)dy = 0$$

$$2y^{\frac{1}{2}}dx + \frac{x}{y^{\frac{1}{2}}}dy - \frac{\sin\sqrt{y}}{y^{\frac{1}{2}}}dy = 0$$

$$\left(2y^{\frac{1}{2}}dx + \frac{x}{y^{\frac{1}{2}}}dy\right) - \frac{\sin\sqrt{y}}{y^{\frac{1}{2}}}dy = 0$$

$d\left(2xy^{\frac{1}{2}}\right) + d\left(2\cos\sqrt{y}\right) = d(C)$

$d\left(2xy^{\frac{1}{2}} + 2\cos\sqrt{y}\right) = d(C)$

$\int d\left(2xy^{\frac{1}{2}} + 2\cos\sqrt{y}\right) = \int d(C)$

$2xy^{\frac{1}{2}} + 2\cos\sqrt{y} = C$

$2\left(xy^{\frac{1}{2}} + \cos\sqrt{y}\right) = C$

$xy^{\frac{1}{2}} + \cos\sqrt{y} = \dfrac{C}{2}$

$\boldsymbol{x\sqrt{y} + \cos\sqrt{y} = K}$; $K = \frac{C}{2}$, solución general de la ED.

19. $3xdy = 2ydx - xy\cos x\,dx$

Solución:

Transformamos la ED de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$3xdy = 2ydx - xy\cos x\,dx$

$3xdy = (2y - xy\cos x)dx$

$-(2y - xy\cos x)dx + 3xdy = 0$

$(-2y + xy\cos x)dx + 3xdy = 0$

$(xy\cos x - 2y)dx + 3xdy = 0$ (*)

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = xy\cos x - 2y$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy\cos x - 2y)$ Derivada parcial con respecto a y.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\cos x\frac{\partial}{\partial y}(y) - 2\frac{\partial}{\partial y}(y)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\cos x\,(1) - 2(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x\cos x - 2}$

$N(x,y) = 3x$

$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x)$ Derivada parcial con respecto a x.

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{3x}[x\cos x - 2 - 3]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{3x}[x\cos x - 5]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{x\cos x}{3x} - \frac{5}{3x}$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{\cos x}{3} - \frac{5}{3x}$

Consideremos $f(x) = \frac{\cos x}{3} - \frac{5}{3x}$.

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(\frac{\cos x}{3} - \frac{5}{3x}\right)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{3}\int \cos x\,dx - \frac{5}{3}\int\frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{3}\sin x - \frac{5}{3}\ln x}$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{3}\sin x} e^{-\frac{5}{3}\ln x}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{e^{\frac{5}{3}\ln x}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{e^{\ln x^{\frac{5}{3}}}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}}$$

Luego, Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}}[(xy\cos x - 2y)dx + 3xdy] = \frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}} \cdot 0$$

$$\frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}}(xy\cos x - 2y)dx + \frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}} \cdot 3xdy = 0$$

$$\left(\frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}} \cdot xy\cos x - \frac{e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}} \cdot 2y\right)dx + \frac{3e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}}dy = 0$$

$\left(\frac{ye^{\frac{1}{3}\sin x}\cos x}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{2ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}}\right)dx + \frac{3e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}}dy = 0$, es una ED exacta.

Resolvemos mediante diferenciales.

$$\left(\frac{ye^{\frac{1}{3}\sin x}\cos x}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{2ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}}\right)dx + \frac{3e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}}dy = 0$$

$$\frac{ye^{\frac{1}{3}\sin x}\cos x}{x^{\frac{2}{3}}}dx - \frac{2ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{5}{3}}}dx + \frac{3e^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}}dy = 0$$

$$d\left(\frac{3ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = d(C)$$

$$\int d\left(\frac{3ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = \int d(C)$$

$$\frac{3ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}} = C$$

$$\frac{ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{C}{3}$$

$$\left(\frac{ye^{\frac{1}{3}\sin x}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^3 = \left(\frac{C}{3}\right)^3$$

$$\frac{y^3e^{\sin x}}{x^2} = K; \qquad K = \left(\frac{C}{3}\right)^3$$

$\boldsymbol{y^3e^{\sin x} = Kx^2}$, solución general de la ED.

20. $(2y\sin x - \cos^3 x)dx + \cos x\, dy = 0$

Solución:

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x,y) = 2y\sin x - \cos^3 x$ $\qquad$ $N(x,y) = \cos x$

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2y\sin x - \cos^3 x)$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\sin x\frac{\partial}{\partial y}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos^3 x)$ $\qquad$ $\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\sin x}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\sin x\,(1) - 0$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\sin x}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. La ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** será función de x?

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\cos x}[2\sin x-(-\sin x)]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\cos x}[2\sin x+\sin x]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{\cos x}[3\sin x]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{3\sin x}{\cos x}$$

Consideremos $f(x)=\frac{3\sin x}{\cos x}$.

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{3\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{3\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-3\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-3\ln\cos x}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{3\ln\cos x}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\ln\cos^3 x}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\cos^3 x}$$

Luego, multiplicamos **P** en la ED.

$$\frac{1}{\cos^3 x}[(2y\sin x-\cos^3 x)dx+\cos x\,dy]=\frac{1}{\cos^3 x}\cdot 0$$

$$\frac{1}{\cos^3 x}(2y\sin x-\cos^3 x)dx+\frac{1}{\cos^3 x}\cos x\,dy=0$$

$$\left(\frac{2y\sin x}{\cos^3 x}-\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}\right)dx+\frac{1}{\cos^2 x}dy=0$$

$\left(\frac{2y\sin x}{\cos^3 x}-1\right)dx+\frac{1}{\cos^2 x}dy=0$, es una ED exacta.

Resolviendo por diferenciales.

$$\left(\frac{2y\sin x}{\cos^3 x}-1\right)dx+\frac{1}{\cos^2 x}dy=0$$

$$\frac{2y\sin x}{\cos^3 x}dx-dx+\frac{1}{\cos^2 x}dy=0$$

$$\left(\frac{2y\sin x}{\cos^3 x}dx+\frac{1}{\cos^2 x}dy\right)-dx=0$$

$$d\left(\frac{y}{\cos^2 x}\right)-d(x)=d(C)$$

$$d\left(\frac{y}{\cos^2 x}-x\right)=d(C)$$

$$\int d\left(\frac{y}{\cos^2 x}-x\right)=\int d(C)$$

$$\frac{y}{\cos^2 x}-x=C$$

$$\frac{y}{\cos^2 x}=x+C$$

$$y=(x+C)\cos^2 x$$

Entonces $\boldsymbol{y=(x+C)\cos^2 x}$ es solución general explícita de la ED.

3.8 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

3.8.1 Método de factor integrante

• Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Presente la solución particular para la condición dada.

1. $y' = \frac{2y+(2x-1)e^x}{2x+1}$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$$y' = \frac{2y+(2x-1)e^x}{2x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y+(2x-1)e^x}{2x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x+1} + \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{2x+1} = \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{2x+1}y = \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{2x+1}y - \frac{(2x-1)e^x}{2x+1} = 0$$

$$dy + \left(-\frac{2}{2x+1}y - \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}\right)dx = 0$$

$$-1\left[dy + \left(-\frac{2}{2x+1}y - \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}\right)dx = 0\right]$$

$$-dy - \left(-\frac{2}{2x+1}y - \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}\right)dx = -1 \cdot 0$$

$$-dy + \left(\frac{2}{2x+1}y + \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}\right)dx = 0$$

$$-dy + \left(\frac{2}{2x+1}y + \frac{(2x-1)e^x}{2x+1}\right)dx = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

Factor integrante.

$$f(x) = -\frac{2}{2x+1}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{2}{2x+1}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{2}{2x+1}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\ln(2x+1)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(2x+1)^{-1}}$$

$$\boldsymbol{P} = (2x+1)^{-1}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2x+1}$$

$\frac{1}{2x+1}\left[-dy+\left(\frac{2}{2x+1}y+\frac{(2x-1)e^x}{2x+1}\right)dx=0\right]$

$-\frac{1}{2x+1}dy+\frac{1}{2x+1}\left(\frac{2}{2x+1}y+\frac{(2x-1)e^x}{2x+1}\right)dx=\frac{1}{2x+1}\cdot 0$

$-\frac{1}{2x+1}dy+\left(\frac{2y}{(2x+1)^2}+\frac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}\right)dx=0$

$-\frac{1}{2x+1}dy+\frac{2y}{(2x+1)^2}dx+\frac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}dx=0$

$\frac{2y}{(2x+1)^2}dx-\frac{1}{2x+1}dy+\frac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}dx=0$

$d\left(-\frac{y}{2x+1}\right)+d\left(\frac{e^x}{2x+1}\right)=d(C)$

$d\left(-\frac{y}{2x+1}+\frac{e^x}{2x+1}\right)=d(C)$

$\int d\left(-\frac{y}{2x+1}+\frac{e^x}{2x+1}\right)=\int d(C)$

$-\frac{y}{2x+1}+\frac{e^x}{2x+1}=C$

$\frac{e^x}{2x+1}-\frac{y}{2x+1}=C$, solución general de la ED.

$-(2x+1)\left(-\frac{y}{2x+1}+\frac{e^x}{2x+1}=C\right)$

$y-e^x=-C(2x+1)$

$y=e^x-C(2x+1)$

$\boldsymbol{y=e^x+K(2x+1)}$; $\quad K=-C$, solución explícita de la ED.

2. $(1+\cos x)y'=\sin^2 x+\sin^2 x\cos x-y\sin x$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx}+f(x)y=r(x)$.

$(1+\cos x)y'=\sin^2 x+\sin^2 x\cos x-y\sin x$

$(1+\cos x)\frac{dy}{dx} = \sin^2 x + \sin^2 x\cos x - y\sin x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x+\sin^2 x\cos x - y\sin x}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x+\sin^2 x\cos x}{1+\cos x} - \frac{y\sin x}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{y\sin x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x+\sin^2 x\cos x}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{1+\cos x}y = \frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{1+\cos x}y = \sin^2 x$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{1+\cos x}y - \sin^2 x = 0$

$dy + \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}y - \sin^2 x\right)dx = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*)

$\frac{1}{1+\cos x}\left[dy + \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}y - \sin^2 x\right)dx = 0\right]$

$\frac{1}{1+\cos x}dy + \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}y - \sin^2 x\right)dx = \frac{1}{1+\cos x}\cdot 0$

$\frac{1}{1+\cos x}dy + \left(\frac{y\sin x}{(1+\cos x)^2} - \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right)dx = 0$

$\frac{1}{1+\cos x}dy + \frac{y\sin x}{(1+\cos x)^2}dx - \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx = 0$

$\left[\frac{y\sin x}{(1+\cos x)^2}dx + \frac{1}{1+\cos x}dy\right] - \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx = 0, \quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$\left[\frac{y\sin x}{(1+\cos x)^2}dx + \frac{1}{1+\cos x}dy\right] - \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx = 0$

$\left[\frac{y\sin x}{(1+\cos x)^2}dx + \frac{1}{1+\cos x}dy\right] - (1-\cos x)dx = 0$

$\left[\frac{y\sin x}{(1+\cos x)^2}dx + \frac{1}{1+\cos x}dy\right] - dx + \cos x\,dx = 0$

Factor integrante.

$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln(1+\cos x)}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(1+\cos x)^{-1}}$

$\boldsymbol{P} = (1+\cos x)^{-1}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{1+\cos x}$

$d\left(\frac{y}{1+\cos x}\right) - d(x) + d(\sin x) = d(C)$

$d\left(\frac{y}{1+\cos x} - x + \sin x\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{y}{1+\cos x} - x + \sin x\right) = \int d(C)$

$\frac{y}{1+\cos x} - x + \sin x = C$, solución general de la ED (*).

$\frac{y}{1+\cos x} = C + x - \sin x$

$\boldsymbol{y = (1 + \cos x)(C + x - \sin x)}$, solución explícita de la ED.

3. $(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy\right)dy$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy\right)dy$

$(1 + y^2) = \left(\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy\right)\frac{dy}{dx}$

$\left(\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy\right)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{\sqrt{1+y^2}\sin y - xy}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}\sin y - xy} + \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}\sin y - xy}$, la ED no es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

¿Será lineal con variable dependiente x, variable independiente y?

Es decir, de la forma: $\frac{dx}{dy} + f(y)x = r(y)$.

$(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy\right)dy$

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y - xy}{1+y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y}{1+y^2} - \frac{xy}{1+y^2}$$

$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}x = \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y}{1+y^2}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}x - \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y}{1+y^2} = 0$$

$$dx + \left(\frac{y}{1+y^2}x - \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y}{1+y^2}\right)dy = 0 \ (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\left[dx + \left(\frac{y}{1+y^2}x - \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y}{1+y^2}\right)dy = 0\right]$$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + (1+y^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{1+y^2}x - \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y}{1+y^2}\right)dy = (1+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 0$$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + \left(\frac{y(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}{1+y^2}x - \frac{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y^2}\sin y}{1+y^2}\right)dy = 0$$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + \left[xy(1+y^2)^{\frac{1}{2}}(1+y^2)^{-1} - \frac{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\sin y}{1+y^2}\right]dy = 0$$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + \left[xy(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{(1+y^2)\sin y}{1+y^2}\right]dy = 0$$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + \left[xy(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \sin y\right]dy = 0$$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + xy(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy - \sin y\,dy = 0$$

$$\left[(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + xy(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy\right] - \sin y\,dy = 0$$

$$d\left[x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] + d(\cos y) = d(C)$$

Factor integrante.

$$f(y) = \frac{y}{1+y^2}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{y}{1+y^2}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+y^2)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$d\left[x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}+\cos y\right]=d(C)$

$\int d\left[x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}+\cos y\right]=\int d(C)$

$x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}+\cos y=C$

$\boldsymbol{x\sqrt{1+y^2}+\cos y=C}$, solución general de la ED (*).

4. $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx}+f(x)y=r(x)$.

$y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$, la ED no es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

¿Será lineal con variable dependiente x, variable independiente y?

Es decir, de la forma: $\frac{dx}{dy}+f(y)x=r(y)$.

$y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$

$(2y\ln y+y-x)dy=ydx$

$\frac{2y\ln y+y-x}{y}=\frac{dx}{dy}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{2y\ln y+y-x}{y}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{2y\ln y+y}{y}-\frac{x}{y}$

$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{y(2\ln y+1)}{y}$

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 2\ln y + 1$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x - 2\ln y - 1 = 0$

$dx + \left(\frac{1}{y}x - 2\ln y - 1\right)dy = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$y\left[dx + \left(\frac{1}{y}x - 2\ln y - 1\right)dy = 0\right]$

$ydx + y\left(\frac{1}{y}x - 2\ln y - 1\right)dy = y \cdot 0$

$ydx + \left(y\frac{1}{y}x - 2y\ln y - y\right)dy = 0$

$ydx + (x - 2y\ln y - y)dy = 0$

$ydx + xdy - 2y\ln y\, dy - ydy = 0$

$(ydx + xdy) - (2y\ln y + y)dy = 0$

$d(xy) - d(y^2\ln y) = d(C)$

$d(xy - y^2\ln y) = d(C)$

$\int d(xy - y^2\ln y) = \int d(C)$

$\boldsymbol{xy - y^2\ln y = C}$, solución general de la ED (*).

Factor integrante.

$f(y) = \frac{1}{y}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{y}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln y}$

$\boldsymbol{P} = y$

5. $xdy + (xy + 2y - 2e^{-x})dx = 0$; $y(1) = 0$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$xdy + (xy + 2y - 2e^{-x})dx = 0$

$x\frac{dy}{dx} + (xy + 2y - 2e^{-x}) = 0$

$\frac{1}{x}\left[x\frac{dy}{dx} + (xy + 2y - 2e^{-x}) = 0\right]$

$\frac{1}{x}x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}(xy+2y-2e^{-x})=\frac{1}{x}\cdot 0\,;\quad x\neq 0$

$\frac{dy}{dx}+\frac{xy+2y-2e^{-x}}{x}=0$

$\frac{dy}{dx}+\frac{xy+2y}{x}-\frac{2e^{-x}}{x}=0$

$\frac{dy}{dx}+\frac{x+2}{x}y=\frac{2e^{-x}}{x}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$\frac{dy}{dx}+\frac{x+2}{x}y-\frac{2e^{-x}}{x}=0$

$dy+\left(\frac{x+2}{x}y-\frac{2e^{-x}}{x}\right)dx=0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$x^2e^x\left[dy+\left(\frac{x+2}{x}y-\frac{2e^{-x}}{x}\right)dx=0\right]$

$x^2e^xdy+x^2e^x\left(\frac{x+2}{x}y-\frac{2e^{-x}}{x}\right)dx=x^2e^x\cdot 0$

$x^2e^xdy+\left(x^2e^x\frac{x+2}{x}y-x^2e^x\frac{2e^{-x}}{x}\right)dx=0$

$x^2e^xdy+[xye^x(x+2)-2x]dx=0$

$x^2e^xdy+[x^2ye^x+2xye^x-2x]dx=0$

$x^2e^xdy+x^2ye^xdx+2xye^xdx-2xdx=0$

$(2xye^xdx+x^2ye^xdx+x^2e^xdy)-2xdx=0$

$d(x^2e^xy)-d(x^2)=d(C)$

$d(x^2e^xy-x^2)=d(C)$

$\int d(x^2e^xy-x^2)=\int d(C)$

$x^2e^xy-x^2=C$, solución general de la ED (*).

Determinemos la solución particular de la ED (*) para $y(1)=0$.

Factor integrante.

$f(x)=\frac{x+2}{x}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{x+2}{x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{x+2\ln x}$

$\boldsymbol{P}=e^{x+\ln x^2}$

$\boldsymbol{P}=e^xe^{\ln x^2}$

$\boldsymbol{P}=e^xx^2$

$\boldsymbol{P}=x^2e^x$

$(1)^2 e^1(0) - (1)^2 = C$

$0 - 1 = C$

$-1 = C$

$C = -1$

$x^2 e^x y - x^2 = -1$

$x^2 e^x y = x^2 - 1$

$\boldsymbol{y = \frac{x^2-1}{x^2 e^x}}$, solución particular explícita de la ED (*).

6. $\cos^2 x \sin x \, dy + (y \cos^3 x - 1)dx = 0$; $\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$\cos^2 x \sin x \, dy + (y \cos^3 x - 1)dx = 0$

$\cos^2 x \sin x \frac{dy}{dx} + (y \cos^3 x - 1) = 0$

$\frac{1}{\cos^2 x \sin x}\left[\cos^2 x \sin x \frac{dy}{dx} + (y \cos^3 x - 1) = 0\right]$

$\frac{1}{\cos^2 x \sin x} \cos^2 x \sin x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2 x \sin x}(y \cos^3 x - 1) = \frac{1}{\cos^2 x \sin x} \cdot 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{y \cos^3 x}{\cos^2 x \sin x} - \frac{1}{\cos^2 x \sin x} = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{1}{\cos^2 x \sin x}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\sin x} y - \frac{1}{\cos^2 x \sin x} = 0$

$dy + \left(\frac{\cos x}{\sin x} y - \frac{1}{\cos^2 x \sin x}\right) dx = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

Factor integrante.

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln \sin x}$

$\boldsymbol{P} = \sin x$

$\sin x \left[dy + \left(\frac{\cos x}{\sin x} y - \frac{1}{\cos^2 x \sin x}\right) dx = 0\right]$

$\sin x\, dy + \sin x \left(\frac{\cos x}{\sin x} y - \frac{1}{\cos^2 x \sin x}\right) dx = \sin x \cdot 0$

$\sin x\, dy + \left(\sin x \frac{\cos x}{\sin x} y - \sin x \frac{1}{\cos^2 x \sin x}\right) dx = 0$

$\sin x\, dy + \left(y \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = 0$

$\sin x\, dy + y \cos x dx - \frac{1}{\cos^2 x} dx = 0$

$\sin x\, dy + y \cos x dx - \sec^2 x\, dx = 0$

$(y \cos x dx + \sin x\, dy) - \sec^2 x\, dx = 0$

$d(y \sin x) - d(\tan x) = d(C)$

$d(y \sin x - \tan x) = d(C)$

$\int d(y \sin x - \tan x) = \int d(C)$

$y \sin x - \tan x = C$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED (*) para $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

$(0) \sin \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} = C$

$0 - 1 = C$

$-1 = C$

$C = -1$

$y \sin x - \tan x = -1$

$y \sin x = \tan x - 1$

$y = \frac{\tan x - 1}{\sin x}$

$y = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} - \frac{1}{\sin x}$

$y = \frac{1}{\cos x} - \csc x$

$\boldsymbol{y = \sec x - \csc x}$, solución particular explícita de la ED (*).

7. $y\frac{dx}{dy} - 2x = 3y^2 - 2\,; \quad y(1) = 1$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dx}{dy} + f(y)x = r(y)$.

$y\frac{dx}{dy} - 2x = 3y^2 - 2$

$\frac{1}{y}\left[y\frac{dx}{dy} - 2x = 3y^2 - 2\right]$

$\frac{1}{y}y\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}2x = \frac{1}{y}(3y^2 - 2)$

$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = \frac{3y^2}{y} - \frac{2}{y}$

$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = 3y - \frac{2}{y}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x - 3y + \frac{2}{y} = 0$

$dx + \left(-\frac{2}{y}x - 3y + \frac{2}{y}\right)dy = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$\frac{1}{y^2}\left[dx + \left(-\frac{2}{y}x - 3y + \frac{2}{y}\right)dy = 0\right]$

$\frac{1}{y^2}dx + \frac{1}{y^2}\left(-\frac{2}{y}x - 3y + \frac{2}{y}\right)dy = \frac{1}{y^2}\cdot 0\,; \;\; y^2 \neq 0$

$\frac{1}{y^2}dx + \left(-\frac{1}{y^2}\frac{2}{y}x - \frac{1}{y^2}3y + \frac{1}{y^2}\frac{2}{y}\right)dy = 0$

$\frac{1}{y^2}dx + \left(-\frac{2}{y^3}x - \frac{3}{y} + \frac{2}{y^3}\right)dy = 0$

$\frac{1}{y^2}dx - \frac{2x}{y^3}dy - \frac{3}{y}dy + \frac{2}{y^3}dy = 0$

Factor integrante.

$f(y) = -\frac{2}{y}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{2}{y}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-2\int \frac{1}{y}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-2\int \frac{1}{y}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-2\ln y}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln y^{-2}}$

$\boldsymbol{P} = y^{-2}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{y^2}$

$\left(\frac{1}{y^2}dx - \frac{2x}{y^3}dy\right) - \frac{3}{y}dy + \frac{2}{y^3}dy = 0$

$d\left(\frac{x}{y^2}\right) - d(3\ln y) + d\left(-\frac{1}{y^2}\right) = d(C)$

$d\left(\frac{x}{y^2} - 3\ln y - \frac{1}{y^2}\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{x}{y^2} - 3\ln y - \frac{1}{y^2}\right) = \int d(C)$

$\frac{x}{y^2} - 3\ln y - \frac{1}{y^2} = C$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED (*) para $x = 1, y = 1$.

$\frac{1}{(1)^2} - 3\ln 1 - \frac{1}{(1)^2} = C$

$\frac{1}{1} - 3 \cdot 0 - \frac{1}{1} = C$

$1 - 0 - 1 = C$

$0 = C$

$C = 0$

$\frac{x}{y^2} - 3\ln y - \frac{1}{y^2} = 0$

$\frac{x}{y^2} = 3\ln y + \frac{1}{y^2}$

$x = y^2\left(3\ln y + \frac{1}{y^2}\right)$

$x = 3y^2\ln y + \frac{y^2}{y^2}$

$\boldsymbol{x = 3y^2 \ln y + 1}$, solución particular explícita de la ED (*).

8. $(\cos x)dx = (x\sin y + \tan y)dy$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$(\cos y)dx = (x\sin y + \tan y)dy$

$(x\sin y + \tan y)dy = (\cos y)dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y}{x\sin y + \tan y}$, la ED no es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

¿Será lineal con variable dependiente x, variable independiente y?

Es decir, de la forma: $\frac{dx}{dy} + f(y)x = r(y)$.

$(\cos x)dx = (x\sin y + \tan y)dy$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x\sin y + \tan y}{\cos y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x\sin y}{\cos y} + \frac{\tan y}{\cos y}$$

$\frac{dx}{dy} - \frac{\sin y}{\cos y}x = \frac{\tan y}{\cos y}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{\sin y}{\cos y}x - \frac{\tan y}{\cos y} = 0$$

$$dx + \left(-\frac{\sin y}{\cos y}x - \frac{\tan y}{\cos y}\right)dy = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\cos y\left[dx + \left(-\frac{\sin y}{\cos y}x - \frac{\tan y}{\cos y}\right)dy = 0\right]$$

$$\cos y\, dx + \cos y\left(-\frac{\sin y}{\cos y}x - \frac{\tan y}{\cos y}\right)dy = \cos y \cdot 0$$

Factor integrante.

$$f(y) = -\frac{\sin y}{\cos y}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{\sin y}{\cos y}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{-\sin y}{\cos y}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(\cos y)}$$

$$\boldsymbol{P} = \cos y$$

$$\cos y\,dx + \left(-\cos y\frac{\sin y}{\cos y}x - \cos y\frac{\tan y}{\cos y}\right)dy = 0$$

$$\cos y\,dx + (-x\sin y - \tan y)dy = 0$$

$$\cos y\,dx - x\sin y\,dy - \tan y\,dy = 0$$

$$(\cos y\,dx - x\sin y\,dy) - \tan y\,dy = 0$$

$$d(x\cos y) + d(\ln|\cos y|) = d(C)$$

$$d(x\cos y + \ln|\cos y|) = d(C)$$

$$\int d(x\cos y + \ln|\cos y|) = \int d(C)$$

$$x\cos y + \ln|\cos y| = C$$

$$x\cos y = C - \ln|\cos y|$$

$$x = \frac{C - \ln|\cos y|}{\cos y}$$

$$x = \frac{C}{\cos y} - \frac{\ln|\cos y|}{\cos y}$$

$$x = C\sec y - \sec y\ln|\cos y|$$

Entonces, $\boldsymbol{x = C\sec y - \sec y\ln|\cos y|}$, es solución general de la ED (*).

9. $(1 + x^2)dy + (xy + x^3 + x)dx = 0$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$$(1 + x^2)dy + (xy + x^3 + x)dx = 0$$

$$(1 + x^2)dy = -(xy + x^3 + x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(xy + x^3 + x)}{1 + x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy - x^3 - x}{1 + x^2}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy-x-x^3}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1+x^2} - \frac{x+x^3}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1+x^2} - \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y = -x$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y + x = 0$

$dy + \left(\frac{xy}{1+x^2} + x\right)dx = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[dy + \left(\frac{xy}{1+x^2} + x\right)dx\right] = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 0$

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dy + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{xy}{1+x^2} + x\right)dx = 0$

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dy + \left(\frac{xy}{1+x^2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)dx = 0$

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dy + \left(\frac{xy}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)dx = 0$

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dy + \frac{xy}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx + x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = 0$

$\left[\frac{xy}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}dy\right] + x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = 0$

$d\left[y(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right] + d\left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right] = d(C)$

$d\left[y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right] = d(C)$

$\int d\left[y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \int d(C)$

Factor integrante.

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\boldsymbol{P} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = C$

$$y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = C - \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{C - \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1+x^2}{3}}$$

10. $\frac{y\prime}{\sec x} = y\sin x + e^{\sin x}\cos x$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$$\frac{y'}{\sec x} = y\sin x + e^{\sin x}\cos x$$

$$y' = \sec x\left(y\sin x + e^{\sin x}\cos x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x\sec x + e^{\sin x}\cos x\sec x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x\sec x + e^{\sin x}$$

$\frac{dy}{dx} - (\sin x\sec x)y = e^{\sin x}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx} - (\sin x\sec x)y - e^{\sin x} = 0$$

$dy + \left[-(\sin x\sec x)y - e^{\sin x}\right]dx = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$\cos x\left\{dy+\left[-(\sin x\sec x)y-e^{\sin x}\right]dx\right\}=0\cdot\cos x$

$\cos x\,dy+\cos x\left[-(\sin x\sec x)y-e^{\sin x}\right]dx=0$

$\cos x\,dy+\left[-\cos x\,(\sin x\sec x)y-e^{\sin x}\cos x\right]dx=0$

$\cos x\,dy+\left[-y\sin x-e^{\sin x}\cos x\right]dx=0$

$\cos x\,dy-y\sin x\,dx-e^{\sin x}\cos x\,dx=0$

$(-y\sin x\,dx+\cos x\,dy)-e^{\sin x}\cos x\,dx=0$

$d(y\cos x)-d\left(e^{\sin x}\right)=d(C)$

$d\left(y\cos x-e^{\sin x}\right)=d(C)$

$\int d\left(y\cos x-e^{\sin x}\right)=\int d(C)$

$y\cos x-e^{\sin x}=C$

$y\cos x=e^{\sin x}+C$

$y=\dfrac{e^{\sin x}+C}{\cos x}$

$y=\dfrac{e^{\sin x}}{\cos x}+\dfrac{C}{\cos x}$

$\boldsymbol{y=e^{\sin x}\sec x+C\sec x}$

Factor integrante.

$f(x)=-\sin x\sec x$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int-\sin x\sec x dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\ln\cos x}$

$\boldsymbol{P}=\cos x$

11. $(y^2-1)dx=y(x+y)dy$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx}+f(x)y=r(x)$.

$(y^2-1)dx=y(x+y)dy$

$\frac{y^2-1}{y(x+y)}=\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{y(x+y)}$, la ED no es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

¿Será lineal con variable dependiente x, variable independiente y?

$(y^2 - 1)dx = y(x + y)dy$

$\frac{dx}{dy} = \frac{y(x+y)}{y^2-1}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{xy+y^2}{y^2-1}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{xy}{y^2-1} + \frac{y^2}{y^2-1}$

$\frac{dx}{dy} - \frac{y}{y^2-1}x = \frac{y^2}{y^2-1}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$\frac{dx}{dy} - \frac{y}{y^2-1}x - \frac{y^2}{y^2-1} = 0$

$dx + \left[-\frac{y}{y^2-1}x - \frac{y^2}{y^2-1}\right]dy = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$\frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}\left\{dx + \left[-\frac{y}{y^2-1}x - \frac{y^2}{y^2-1}\right]dy\right\} = \frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot 0$

$\frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx + \frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}\left[-\frac{y}{y^2-1}x - \frac{y^2}{y^2-1}\right]dy = 0$

$\frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx + \left[-\frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{y}{y^2-1}x - \frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{y^2}{y^2-1}\right]dy = 0$

$$\frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx + \left[-\frac{xy}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]dy = 0$$

$$\frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx - \frac{xy}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy - \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy = 0$$

Factor integrante.

$f(y) = -\frac{y}{y^2-1}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{y}{y^2-1}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2y}{y^2-1}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\ln(y^2-1)}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(y^2-1)^{-\frac{1}{2}}}$

$\boldsymbol{P} = (y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left[\frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx - \frac{xy}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy\right] - \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy = 0$$

$$d\left[\frac{x}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right] - \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy = d(C)$$

$$\int d\left[\frac{x}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right] - \int \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy = \int d(C)$$

$$\frac{x}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy = C$$

$$\frac{x}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy + C$$

Como no es fácil calcular la diferencial de $\frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy$ y se procedió a integrar cada término de la ecuación, lo que resulta que: $\int \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy$.

Calculamos la integral por sustitución trigonométrica.

$$\frac{x}{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{y^2}{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy + C$$

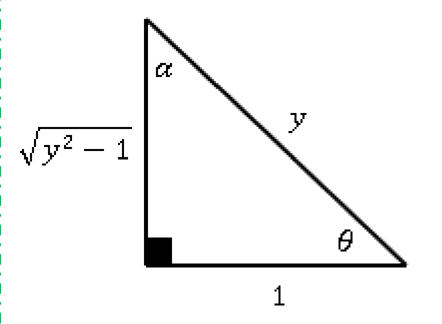
$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{y^2}{\left(\sqrt{y^2-1}\right)^3}dy + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec^2\theta}{(\tan\theta)^3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec^3\theta}{(\tan\theta)^2}d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec^3\theta}{\tan^2\theta}d\theta + C$$

Sustitución trigonométrica.



$\sec\theta = y$ $\qquad$ $\tan\theta = \sqrt{y^2-1}$

$y = \sec\theta \quad \rightarrow \quad y^2 = \sec^2\theta$

$\frac{d}{d\theta}y = \frac{d}{d\theta}\sec\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = \sec\theta\tan\theta$

$dy = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec^3\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec^3\theta}{\sin^2\theta\sec^2\theta} d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec\theta}{\sin^2\theta} d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \sec\theta\csc^2\theta\, d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \sec\theta\,(1+\cot^2\theta) d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int (\sec\theta + \sec\theta\cot^2\theta) d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \int \sec\theta\, d\theta + \int \sec\theta\cot^2\theta\, d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + \int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \ln(\sec\theta + \tan\theta) - \frac{1}{\sin\theta} + C$$

Escribiendo en términos de y, se obtiene:

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) - \frac{1}{\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}} + C$$

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) + C - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$x=\sqrt{y^2-1}\left[\ln\left(\sqrt{y^2-1}+y\right)+C-\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right]$$

$$x=\sqrt{y^2-1}\left[\ln\left(\sqrt{y^2-1}+y\right)+C\right]-\sqrt{y^2-1}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$\boldsymbol{x=\sqrt{y^2-1}\left[\ln\left(\sqrt{y^2-1}+y\right)+C\right]-y}$$

12. $(1+2xy)y'=1+y^2$

Solución:

$(1+2xy)y'=1+y^2$

$(1+2xy)\frac{dy}{dx}=1+y^2$

$(1+2xy)dy=(1+y^2)dx$

$$\frac{1+2xy}{1+y^2}=\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1+2xy}{1+y^2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+y^2}+\frac{2xy}{1+y^2}$$

$\frac{dx}{dy}-\frac{2y}{1+y^2}x=\frac{1}{1+y^2}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2xy}{1+y^2}-\frac{1}{1+y^2}=0$$

$$\frac{dx}{dy}-\left(\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)=0$$

$$dx-\left(\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)dy=0\quad(*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{1+y^2}\left[dx-\left(\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)dy\right]=\frac{1}{1+y^2}\cdot 0$$

$$\frac{1}{1+y^2}dx-\frac{1}{1+y^2}\left(\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{1}{1+y^2}dx-\left(\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{1}{1+y^2}dx-\left(\frac{2xy}{(1+y^2)^2}+\frac{1}{(1+y^2)^2}\right)dy=0$$

$$\frac{1}{1+y^2}dx-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}dy-\frac{1}{(1+y^2)^2}dy=0$$

$$\frac{1}{1+y^2}dx-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}dy-\frac{1}{(1+y^2)^2}dy=0$$

$$d\left[\frac{x}{1+y^2}\right]-\frac{1}{(1+y^2)^2}dy=d(C)$$

$$d\left[\frac{x}{1+y^2}\right]=\frac{1}{(1+y^2)^2}dy+d(C)$$

$$\int d\left[\frac{x}{1+y^2}\right]=\int\frac{1}{(1+y^2)^2}dy+\int d(C)$$

$$\frac{x}{1+y^2}=\int\frac{1}{(1+y^2)^2}dy+C$$

Factor integrante.

$$f(y)=-\frac{2y}{1+y^2}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(y)dy}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int -\frac{2y}{1+y^2}dy}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\int \frac{2y}{1+y^2}dy}$$

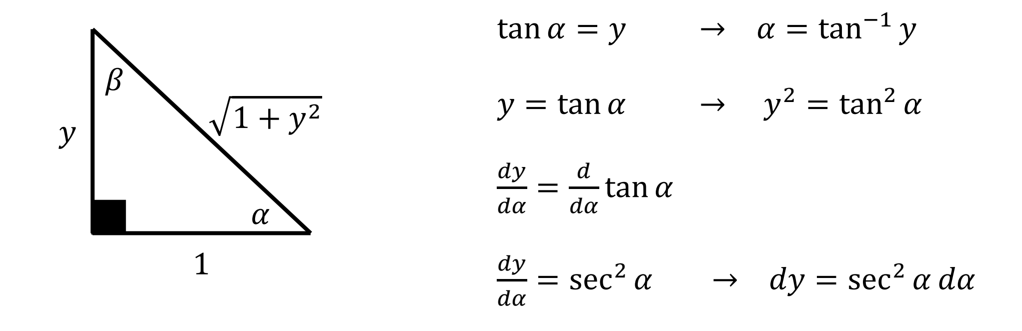
$$\boldsymbol{P}=e^{-\ln(1+y^2)}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\ln(1+y^2)}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{1+y^2}$$

Como no es fácil determinar la diferencial de $\frac{1}{(1+y^2)^2}dy$, además, se procedió a integrar cada término de la ecuación, lo que resulto una integral $\int\frac{1}{(1+y^2)^2}dy$.

Resolvemos la integral por sustitución trigonométrica.



$$\frac{x}{1+y^2} = \int \frac{1}{(1+\tan^2\alpha)^2}\sec^2\alpha\, d\alpha + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \int \frac{1}{(\sec^2\alpha)^2}\sec^2\alpha\, d\alpha + C; \qquad \sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \int \frac{1}{\sec^4\alpha}\sec^2\alpha\, d\alpha + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \int \frac{1}{\sec^2\alpha} d\alpha + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \int \cos^2\alpha\, d\alpha + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \int \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) d\alpha + C; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\alpha) d\alpha + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(\int d\alpha + \int \cos 2\alpha\, d\alpha\right) + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\right) + C; \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) + C$$

Escribiendo la ecuación en términos de y.

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} y + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} y + \frac{y}{\left(\sqrt{1+y^2}\right)^2}\right) + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} y + \frac{y}{1+y^2}\right) + C$$

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} y + \frac{y}{2(1+y^2)} + C$$

$$x = (1+y^2)\left[\frac{1}{2}\tan^{-1} y + \frac{y}{2(1+y^2)} + C\right]$$

$$x = \frac{(1+y^2)}{2}\tan^{-1} y + (1+y^2)\frac{y}{2(1+y^2)} + C(1+y^2)$$

$$\boldsymbol{x = \frac{(1+y^2)}{2}\tan^{-1} y + \frac{y}{2} + C(1+y^2)}$$

13. $(y\sin 2x - \cos x)dx + (1+\sin^2 x)dy = 0$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$$(y\sin 2x - \cos x)dx + (1+\sin^2 x)dy = 0$$

$$(1+\sin^2 x)dy = -(y\sin 2x - \cos x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(y\sin 2x - \cos x)}{1+\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y\sin 2x + \cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y\sin 2x}{1+\sin^2 x} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y\sin 2x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}y = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y\sin 2x}{1+\sin^2 x} - \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} = 0$$

$$dy + \left(\frac{y \sin 2x}{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\right) dx = 0 \quad (*)$$

Factor integrante.

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x) dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(1+\sin^2 x)}$$

$$\boldsymbol{P} = 1 + \sin^2 x$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(1 + \sin^2 x)\left[dy + \left(\frac{y \sin 2x}{1+\sin^2 x} - \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) dx\right] = 0(1 + \sin^2 x)$$

$$(1 + \sin^2 x)dy + (1 + \sin^2 x)\left(\frac{y \sin 2x}{1+\sin^2 x} - \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) dx = 0$$

$$(1 + \sin^2 x)dy + \left(\frac{y \sin 2x(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x} - \frac{\cos x(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}\right) dx = 0$$

$$(1 + \sin^2 x)dy + (y \sin 2x - \cos x)dx = 0$$

$$dy + \sin^2 x\, dy + y \sin 2x\, dx - \cos x\, dx = 0$$

$$(y \sin 2x\, dx + \sin^2 x\, dy) - \cos x\, dx + dy = 0$$

$$d(y \sin^2 x) - d(\sin x) + d(y) = d(C)$$

$$d(y \sin^2 x - \sin x + y) = d(C)$$

$$\int d(y \sin^2 x - \sin x + y) = \int d(C)$$

$$y \sin^2 x - \sin x + y = C$$

$$y \sin^2 x + y = \sin x + C$$

$$y(\sin^2 x + 1) = \sin x + C$$

$$\boldsymbol{y = \frac{\sin x + C}{\sin^2 x + 1}}$$

14. $ydx - 4xdy = y^6 dy$; $y(4) = 1$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$$ydx - 4xdy = y^6 dy$$

$$ydx = y^6 dy + 4xdy$$

$$ydx = (y^6 + 4x)dy$$

$$\frac{y}{y^6 + 4x} = \frac{dy}{dx}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^6+4x}$, la ED no es lineal en y.

¿Será lineal en x?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^6 + 4x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^6 + 4x}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^6}{y} + \frac{4x}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = y^5 + \frac{4}{y}x$$

$\frac{dx}{dy} - \frac{4}{y}x = y^5$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{4}{y}x - y^5 = 0$$

$$\frac{dx}{dy} - \left(\frac{4}{y}x + y^5\right) = 0$$

$$dx - \left(\frac{4}{y}x + y^5\right)dy = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{y^4}\left[dx-\left(\frac{4}{y}x+y^5\right)dy\right]=\frac{1}{y^4}\cdot 0; \quad y^4\neq 0$$

$$\frac{1}{y^4}dx-\frac{1}{y^4}\left(\frac{4}{y}x+y^5\right)dy=0$$

$$\frac{1}{y^4}dx-\left(\frac{1}{y^4}\cdot\frac{4}{y}x+\frac{1}{y^4}\cdot y^5\right)dy=0$$

$$\frac{1}{y^4}dx-\left(\frac{4x}{y^5}+y\right)dy=0$$

$$\frac{1}{y^4}dx-\frac{4x}{y^5}dy-ydy=0$$

$$\left(\frac{1}{y^4}dx-\frac{4x}{y^5}dy\right)-ydy=0$$

$$d\left(\frac{x}{y^4}\right)-d\left(\frac{1}{2}y^2\right)=d(C)$$

$$d\left(\frac{x}{y^4}-\frac{1}{2}y^2\right)=d(C)$$

$$\int d\left(\frac{x}{y^4}-\frac{1}{2}y^2\right)=\int d(C)$$

$\frac{x}{y^4}-\frac{1}{2}y^2=C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x=4$, $y=1$.

$$\frac{4}{1^4}-\frac{1}{2}\cdot 1^2=C$$

$$\frac{4}{1}-\frac{1}{2}\cdot 1=C$$

$$4-\frac{1}{2}=C$$

$$\frac{7}{2}=C \quad \rightarrow \quad C=\frac{7}{2}$$

Factor integrante.

$$f(y)=-\frac{4}{y}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(y)dy}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int -\frac{4}{y}dy}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-4\int\frac{1}{y}dy}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-4\ln y}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{4\ln y}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\ln y^4}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{y^4}$$

$$\frac{x}{y^4} - \frac{1}{2}y^2 = \frac{7}{2}$$

$$\frac{x}{y^4} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{2}$$

$$x = y^4\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{x = \frac{y^4}{2}(y^2 + 7)}$$

15. $y' - y'x^2 - y + x^3 + x^2 - x - 1 = 0; \quad y(0) = 0$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$$y' - y'x^2 - y + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

$$y' - y'x^2 = x + y - x^3 - x^2 + 1$$

$$y'(1 - x^2) = x + y - x^3 - x^2 + 1$$

$$y' = \frac{x + y - x^3 - x^2 + 1}{1 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x - x^3 + 1 - x^2}{1 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 - x^2} + \frac{x - x^3 + 1 - x^2}{1 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1 - x^2} = \frac{x(1 - x^2) + 1 - x^2}{1 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1 - x^2}y = \frac{(1 - x^2)(x + 1)}{1 - x^2}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1-x^2}y = x + 1$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1-x^2}y - (x+1) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{y}{1-x^2} + x + 1\right) = 0$$

$$dy - \left(\frac{y}{1-x^2} + x + 1\right)dx = 0 \quad (*)$$

Factor integrante.

$$f(x) = -\frac{1}{1-x^2}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{1}{1-x^2}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{1}{1-x^2}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{1}{(1+x)(1-x)}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \left(\frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{1+x}dx + \int \frac{1}{1-x}dx\right]}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Fracciones parciales.

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}$$

$$1 = A(1-x) + B(1+x)$$

Evaluando con $x = 1$, se obtiene:

$$1 = A(1-1) + B(1+1)$$

$$1 = A(0) + B(2)$$

$$1 = B(2) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Evaluando con $x = -1$, se obtiene:

$$1 = A\big(1-(-1)\big) + B(1-1)$$

$$1 = A(1+1) + B(0)$$

$$1 = A(1+1)$$

$$1 = A(2) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[dy-\left(\frac{y}{1-x^2}+x+1\right)dx\right]=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 0$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{1-x^2}+x+1\right)dx=0$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{y}{1-x^2}dx-(x+1)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dx=0$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy-\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{y}{(1+x)(1-x)}dx-(1+x)\cdot\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}dx=0$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy-\frac{y}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx-(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=0$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy-\frac{y}{[(1+x)(1-x)]^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx-[(1+x)(1-x)]^{\frac{1}{2}}dx=0$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy-\frac{y}{[1-x^2]^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx-[1-x^2]^{\frac{1}{2}}dx=0$$

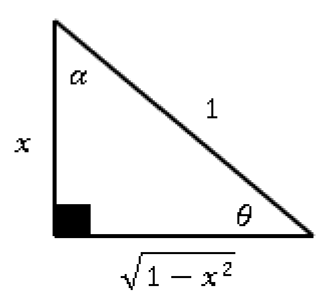
$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy-\frac{y}{\sqrt{1-x^2}(1+x)}dx-\sqrt{1-x^2}dx=0$$

$$\left[-\frac{y}{\sqrt{1-x^2}(1+x)}dx+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}dy\right]-\sqrt{1-x^2}dx=0$$

$$d\left[y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\sqrt{1-x^2}dx=d(C)$$

$$\int d\left[y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\int\sqrt{1-x^2}dx=\int d(C)$$

Sustitución trigonométrica.



$\sin\theta = x \quad \rightarrow \quad \theta = \sin^{-1} x$

$x = \sin\theta \qquad\qquad \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$\frac{d}{d\theta} x = \frac{d}{d\theta} \sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$

$dx = \cos\theta \, d\theta$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \int \sqrt{1-x^2}dx = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \int \cos\theta \cos\theta \, d\theta = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \int \cos^2\theta \, d\theta = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta) d\theta = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\int d\theta + \int \cos 2\theta \, d\theta\right) = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\right) = C$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) = C$$

Escribiendo la ecuación en términos de x.

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}\right) = C$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 0$.

$$0\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} 0 + 0\sqrt{1-0^2}\right) = C$$

$$0 - \frac{1}{2}(0+0) = C$$

$$-\frac{1}{2}(0) = C$$

$$0 = C$$

$$C = 0$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right) = 0$$

$$y\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right)}{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right)(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

16. $(\cos^2 x)y' + y\cos^2 x \sec x \tan x = \sin x\,; \qquad y(0) = 6$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$$(\cos^2 x)y' + y\cos^2 x \sec x \tan x = \sin x$$

$$(\cos^2 x)y' = \sin x - y\cos^2 x \sec x \tan x$$

$$y' = \frac{\sin x - y\cos^2 x \sec x \tan x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{y\cos^2 x \sec x \tan x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - y\sec x \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} + y\sec x \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$\frac{dy}{dx} + (\sec x \tan x)y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx} + (\sec x \tan x)y - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y\sec x \tan x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

$$dy + \left(y\sec x \tan x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = 0 \quad (*)$$

Factor integrante.

$$f(x) = \sec x \tan x$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \sec x \tan x dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\sec x}$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$e^{\sec x}\left[dy + \left(y\sec x \tan x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx\right] = 0 \cdot e^{\sec x}$$

$$e^{\sec x}dy + e^{\sec x}\left(y\sec x \tan x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = 0$$

$$e^{\sec x}dy + \left(y\sec x \tan x\, e^{\sec x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}e^{\sec x}\right)dx = 0$$

$$e^{\sec x}dy + y\sec x\tan x\, e^{\sec x}dx - \frac{\sin x}{\cos^2 x}e^{\sec x}dx = 0$$

$$(y\sec x\tan x\, e^{\sec x}dx + e^{\sec x}dy) - \frac{\sin x}{\cos^2 x}e^{\sec x}dx = 0$$

$$d(ye^{\sec x}) - d(e^{\sec x}) = d(C)$$

$$d(ye^{\sec x} - e^{\sec x}) = d(C)$$

$$\int d(ye^{\sec x} - e^{\sec x}) = \int d(C)$$

$ye^{\sec x} - e^{\sec x} = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 6$.

$$6e^{\sec 0} - e^{\sec 0} = C$$

$$5e^{\sec 0} = C$$

$$5e^1 = C$$

$$5e = C \qquad \rightarrow \qquad C = 5e$$

$$ye^{\sec x} - e^{\sec x} = 5e$$

$$ye^{\sec x} = 5e + e^{\sec x}$$

$$y = \frac{5e + e^{\sec x}}{e^{\sec x}}$$

$$y = \frac{5e}{e^{\sec x}} + \frac{e^{\sec x}}{e^{\sec x}}$$

$$y = 5ee^{-\sec x} + 1$$

$\boldsymbol{y = 5e^{1-\sec x} + 1}$, solución particular de la ED.

17. $e^x[y-3(e^x+1)^2]dx+(e^x+1)dy=0; \quad y(0)=4$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx}+f(x)y=r(x)$.

$$e^x[y-3(e^x+1)^2]dx+(e^x+1)dy=0$$

$$(e^x+1)dy=-e^x[y-3(e^x+1)^2]dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^x[y-3(e^x+1)^2]}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-ye^x+3(e^x+1)^2e^x}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-ye^x}{e^x+1}+\frac{3(e^x+1)^2e^x}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{ye^x}{e^x+1}=3(e^x+1)e^x$$

$\frac{dy}{dx}+\frac{e^x}{e^x+1}y=3e^x(e^x+1)$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{e^x}{e^x+1}y-3e^x(e^x+1)=0$$

$$dy+\left[\frac{ye^x}{e^x+1}-3e^x(e^x+1)\right]dx=0 \quad (*)$$

Factor integrante.

$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{e^x}{e^x+1}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\ln(e^x+1)}$

$\boldsymbol{P}=e^x+1$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(e^x+1)\left\{dy+\left[\frac{ye^x}{e^x+1}-3e^x(e^x+1)\right]dx\right\}=0\cdot(e^x+1)$$

$$(e^x+1)dy+(e^x+1)\left[\frac{ye^x}{e^x+1}-3e^x(e^x+1)\right]dx=0$$

$$(e^x+1)dy+\left[\frac{ye^x}{e^x+1}(e^x+1)-3e^x(e^x+1)(e^x+1)\right]dx=0$$

$$(e^x+1)dy+[ye^x-3e^x(e^x+1)^2]dx=0$$

$(e^x+1)dy+ye^xdx-3e^x(e^x+1)^2dx=0$

$[ye^xdx+(e^x+1)dy]-3e^x(e^x+1)^2dx=0$

$d[y(e^x+1)]-d[(e^x+1)^3]=d(C)$

$d[y(e^x+1)-(e^x+1)^3]=d(C)$

$\int d[y(e^x+1)-(e^x+1)^3]=\int d(C)$

$y(e^x+1)-(e^x+1)^3=C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x=0$, $y=4$.

$4(e^0+1)-(e^0+1)^3=C$

$4(1+1)-(1+1)^3=C$

$4(2)-(2)^3=C$

$8-8=C$

$0=C \quad \rightarrow \quad C=0$

$y(e^x+1)-(e^x+1)^3=0$

$y(e^x+1)=(e^x+1)^3$

$$y=\frac{(e^x+1)^3}{(e^x+1)}$$

$\boldsymbol{y=(e^x+1)^2}$

18. $(y' + y\tan x) = \sin 2x\,; \quad y(0) = 2$

Solución:

Transformamos la ED en la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$(y' + y\tan x) = \sin 2x$

$y' + y\tan x = \sin 2x$

$\frac{dy}{dx} + (\tan x)y = \sin 2x$, la ED es lineal con variable dependiente en y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx} + (\tan x)y - \sin 2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x - \sin 2x = 0$$

$$dy + (y\tan x - \sin 2x)dx = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{\cos x}[dy + (y\tan x - \sin 2x)dx] = \frac{1}{\cos x} \cdot 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \frac{1}{\cos x}(y\tan x - \sin 2x)dx = 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \left(\frac{1}{\cos x} \cdot y\tan x - \frac{1}{\cos x} \cdot \sin 2x\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \left(y\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \cdot 2\sin x\cos x\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \left(\frac{y\sin x}{\cos^2 x} - 2\sin x\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \frac{y\sin x}{\cos^2 x}dx - 2\sin x\,dx = 0$$

$$\left(\frac{y\sin x}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{\cos x}dy\right) - 2\sin x\,dx = 0$$

Factor integrante.

$f(x) = \tan x$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \tan x dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln\cos x}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln\cos x}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\cos x}$

$d\left(\frac{y}{\cos x}\right) + d(2\cos x) = d(C)$

$d\left(\frac{y}{\cos x} + 2\cos x\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{y}{\cos x} + 2\cos x\right) = \int d(C)$

$\frac{y}{\cos x} + 2\cos x = C$, solución general de la ED.

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 2$.

$\frac{2}{\cos 0} + 2\cos 0 = C$

$\frac{2}{1} + 2 \cdot 1 = C$

$2 + 2 = C$

$4 = C \quad \rightarrow \quad C = 4$

$\frac{y}{\cos x} + 2\cos x = 4$

$\frac{y}{\cos x} = 4 - 2\cos x$

$y = \cos x\,(4 - 2\cos x)$

$\boldsymbol{y = 4\cos x - 2\cos^2 x}$

19. $x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3-2}{x}$

Solución:

Transformamos la ED de la forma: $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$.

$x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}$

$x(x^3 + 1)\frac{dy}{dx} + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}$

$$\frac{1}{x(x^3+1)}\left[x(x^3+1)\frac{dy}{dx}+(2x^3-1)y=\frac{x^3-2}{x}\right]$$

$$\frac{1}{x(x^3+1)}\cdot x(x^3+1)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x(x^3+1)}\cdot(2x^3-1)y=\frac{1}{x(x^3+1)}\cdot\frac{x^3-2}{x}$$

$\frac{dy}{dx}+\frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}y=\frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{(2x^3-1)y}{x(x^3+1)}-\frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}=0$$

$$dy+\left[\frac{(2x^3-1)y}{x(x^3+1)}-\frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}\right]dx=0 \quad (*)$$

Factor integrante.

$$f(x)=\frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{x^3-2}{x(x^3+1)}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx^2+Cx+D}{x^3+1}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{3x^2+0x+0}{x^3+1}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{x^3+1}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\ln x+\ln(x^3+1)}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln\frac{x^3+1}{x}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{x^3+1}{x}$$

Fracciones parciales.

$$\frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx^2+Cx+D}{x^3+1}$$

$$2x^3-1=A(x^3+1)+(Bx^2+Cx+D)x$$

$$2x^3-1=Ax^3+A+Bx^3+Cx^2+Dx$$

$$2x^3-1=Ax^3+Bx^3+Cx^2+Dx+A$$

$$2x^3-1=(A+B)x^3+Cx^2+Dx+A$$

Comparando los coeficientes.

$$\begin{cases}A+B=2\\ C=0\\ D=0\\ A=-1\end{cases}$$

$$B=2-A$$

$$B=2-(-1)$$

$$B=2+1$$

$$B=3$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{x^3+1}{x}\left\{dy+\left[\frac{(2x^3-1)y}{x(x^3+1)}-\frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}\right]dx\right\}=\frac{x^3+1}{x}\cdot 0;\quad x\neq 0$$

$$\frac{x^3+1}{x}dy+\frac{x^3+1}{x}\left[\frac{(2x^3-1)y}{x(x^3+1)}-\frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}\right]dx=0$$

$$\frac{x^3+1}{x}dy+\frac{x^3+1}{x}\cdot\frac{(2x^3-1)y}{x(x^3+1)}dx-\frac{x^3+1}{x}\cdot\frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}dx=0$$

$$\frac{x^3+1}{x}dy+\frac{(2x^3-1)y}{x^2}dx-\frac{x^3-2}{x^3}dx=0$$

$$\left[\frac{(2x^3-1)y}{x^2}dx+\frac{x^3+1}{x}dy\right]-\frac{x^3-2}{x^3}dx=0$$

$$d\left[y\left(\frac{x^3+1}{x}\right)\right]-d\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)=d(C)$$

$$\int d\left[y\left(\frac{x^3+1}{x}\right)\right]-\int d\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)=\int d(C)$$

$$y\left(\frac{x^3+1}{x}\right)-\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)=C$$

$$y\left(\frac{x^3+1}{x}\right)=\frac{x^3+1}{x^2}+C$$

$$y=\left(\frac{x}{x^3+1}\right)\left(\frac{x^3+1}{x^2}+C\right)$$

$$y=\left(\frac{x}{x^3+1}\right)\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)+C\left(\frac{x}{x^3+1}\right)$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{x}+\frac{Cx}{x^3+1}}$$

20. $(\sin 2x)\frac{dy}{dx} + (2\sin^2 x)y = 2\sin x$

Solución:

$(\sin 2x)\frac{dy}{dx} + (2\sin^2 x)y = 2\sin x$

$$\frac{1}{\sin 2x}\left[(\sin 2x)\frac{dy}{dx} + (2\sin^2 x)y = 2\sin x\right]$$

$$\frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sin 2x}(2\sin^2 x)y = \frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2\sin^2 x}{\sin 2x}y = \frac{2\sin x}{\sin 2x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}y = \frac{2\sin x}{2\sin x\cos x}; \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x}y = \frac{1}{\cos x}$, la ED es lineal con variable dependiente y, variable independiente x.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x}y - \frac{1}{\cos x} = 0$$

$$dy + \left(\frac{y\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right)dx = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{\cos x}\left[dy + \left(\frac{y\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right)dx\right] = 0\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \frac{1}{\cos x}\left(\frac{y\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \left(\frac{y\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \left(\frac{y\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{\cos x}dy + \frac{y\sin x}{\cos^2 x}dx - \frac{1}{\cos^2 x}dx = 0$$

Factor integrante.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\ln\cos x}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln\cos x}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\left(\frac{\text{ysin}\, x}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{\cos x}dy\right) - \frac{1}{\cos^2 x}dx = 0$$

$$\left(\frac{\text{ysin}\, x}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{\cos x}dy\right) - \sec^2 x\, dx = 0$$

$$d\left(\frac{y}{\cos x}\right) - d(\tan x) = d(C)$$

$$d\left(\frac{y}{\cos x} - \tan x\right) = d(C)$$

$$\int d\left(\frac{y}{\cos x} - \tan x\right) = \int d(C)$$

$$\frac{y}{\cos x} - \tan x = C$$

$$\frac{y}{\cos x} = \tan x + C$$

$$y = \cos x\,(\tan x + C)$$

$$y = \cos x \tan x + C\cos x$$

$$y = \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) + C\cos x$$

$$\boldsymbol{y = \sin x + C\cos x}$$

3.8.2 Método de variación de parámetros

• Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de variación de parámetros.

1. $y' + (\cos x)y = (\sec^2 x)e^{-\sin x}$

Solución:

$y' + (\cos x)y = (\sec^2 x)e^{-\sin x}$

$\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = (\sec^2 x)e^{-\sin x}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0$, la ED homogénea asociada.

$f(x) = \cos x$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int \cos x dx}$

$y = Ke^{-\sin x}$

Supongamos que:

$y = u(x)e^{-\sin x}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = (\sec^2 x)e^{-\sin x}$.

Calculamos la derivada de y.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left[u(x)e^{-\sin x}\right]$

$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin x}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}\left(e^{-\sin x}\right)$

$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin x}u'(x) + u(x)\left[e^{-\sin x}\frac{d}{dx}(-\sin x)\right]$

$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin x}u'(x) + u(x)\left[e^{-\sin x}(-\cos x)\right]$

$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin x}u'(x) - u(x)\cos x\, e^{-\sin x}$

Sustituyendo, se obtiene:

$e^{-\sin x}u'(x) - u(x)\cos x\, e^{-\sin x} + (\cos x)u(x)e^{-\sin x} = (\sec^2 x)e^{-\sin x}$

$e^{-\sin x}u'(x) - \cancel{u(x)\cos x\, e^{-\sin x}} + \cancel{u(x)\cos x\, e^{-\sin x}} = (\sec^2 x)e^{-\sin x}$

$e^{-\sin x}u'(x) = (\sec^2 x)e^{-\sin x}$

$u'(x) = \frac{(\sec^2 x)e^{-\sin x}}{e^{-\sin x}}$

$u'(x) = \sec^2 x$

Integrando, se obtiene:

$u(x) = \tan x + K_1$

Luego, la solución general de la ED es:

$\boldsymbol{y = (\tan x + K_1)e^{-\sin x}}$

2. $xy' - 2x^2y = e^{x^2}$

Solución:

$xy' - 2x^2y = e^{x^2}$

$\frac{1}{x}\left[xy' - 2x^2y = e^{x^2}\right]$ Multiplicamos por $\frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x}xy' - \frac{1}{x}2x^2y = \frac{1}{x}e^{x^2}$ Simplificando.

$y' - 2xy = \frac{1}{x}e^{x^2}$

$\frac{dy}{dx} - 2xy = \frac{1}{x}e^{x^2}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = -2x$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int -2xdx}$

$y = Ke^{\int 2xdx}$

$y = Ke^{x^2}$

Supongamos que:

$y = u(x)e^{x^2}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} - 2xy = \frac{1}{x}e^{x^2}$.

Calculamos la primera derivada de y.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left[u(x)e^{x^2}\right]$

$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}u'(x) + u(x)2xe^{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}u'(x) + 2xu(x)e^{x^2}$

Sustituyendo, se obtiene:

$e^{x^2}u'(x) + \cancel{2xu(x)e^{x^2}} - \cancel{2xu(x)e^{x^2}} = \frac{1}{x}e^{x^2}$

$e^{x^2}u'(x) = \frac{1}{x}e^{x^2}$

$u'(x) = \frac{1}{e^{x^2}}\frac{1}{x}e^{x^2}$

$u'(x) = \frac{1}{x}$

Integrando, se obtiene:

$u(x) = \ln x + K_1$

Luego, la solución general de la ED es:

$\boldsymbol{y = (\ln x + K_1)e^{x^2}}$

3. $y' = \frac{1-xy}{1-x^2}$

Solución:

$y' = \frac{1-xy}{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy}{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{xy}{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int \frac{x}{1-x^2}dx}$

$y = Ke^{-\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2x}{1-x^2}dx}$

$y = Ke^{\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)}$

$y = Ke^{\ln\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

$y = K(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

Supongamos que:

$y = u(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$.

Calculamos la primera derivada de y.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left[u(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}u'(x) + u(x)\left[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}u'(x) - xu(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}u'(x) - xu(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{1-x^2}u(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}u'(x) - xu(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + xu(x)(1-x^2)^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}u'(x) - \cancel{xu(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} + \cancel{xu(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}u'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

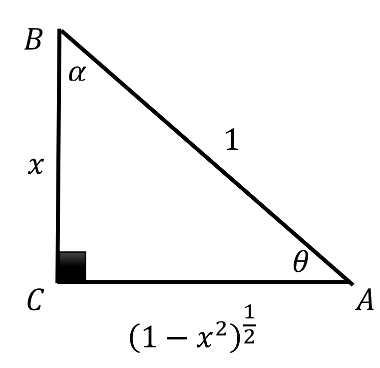
$$u'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)}$$

$$u'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int u'(x) = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$u(x) = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

Resolvemos la integral por sustitución trigonométrica.



$$\sin\theta = x \quad \rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}x$$

$$x = \sin\theta \quad \rightarrow \quad x^2 = \sin^2\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}x = \frac{d}{d\theta}\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

$$dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$u(x) = \int \frac{1}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \cos\theta \, d\theta$$

$$u(x) = \int \frac{1}{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \cos\theta \, d\theta$$

$$u(x) = \int \frac{\cos\theta}{\cos^3\theta} d\theta$$

$$u(x) = \int \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$u(x) = \int \sec^2\theta \, d\theta$$

$$u(x) = \tan\theta + K_1$$

$$u(x) = \tan(\sin^{-1} x) + K_1$$

$$u(x) = \frac{\sin(\sin^{-1} x)}{\cos(\sin^{-1} x)} + K_1$$

$$u(x) = \frac{x}{\cos(\sin^{-1} x)} + K_1$$

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + K_1$$

$\cos(\sin^{-1} x) = \cos\alpha$, donde $\alpha = \sin^{-1} x$.

$\alpha = \sin^{-1} x$

$\sin\alpha = x \quad \rightarrow \; \sin^2\alpha = x^2$

Sabemos que:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \; \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

Luego, la solución general de la ED es:

$$y = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + K_1\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + K_1\right)\sqrt{1-x^2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} + K_1\sqrt{1-x^2}$$

Simplificando.

$$\boldsymbol{y = x + K_1\sqrt{1-x^2}}$$

4. $xy' = y + x^2 \sin x$

Solución:

$xy' = y + x^2 \sin x$

$\frac{1}{x}[xy' = y + x^2 \sin x]$ Multiplicando por $\frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x}xy' = \frac{1}{x}(y + x^2 \sin x)$ Simplificando.

$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2 \sin x}{x}$

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x \sin x$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x \sin x$, la ED es lineal y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int -\frac{1}{x}dx}$

$y = Ke^{\int \frac{1}{x}dx}$

$y = Ke^{\ln x}$

$y = Kx$

Supongamos que:

$y = u(x)x$, es solución general de $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x \sin x$.

Calculamos la primera derivada de y.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}[u(x)x]$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = xu'(x) + u(x)(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = xu'(x) + u(x)$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$xu'(x) + u(x) - \frac{1}{x}u(x)x = x\sin x$$

$$xu'(x) + u(x) - u(x) = x\sin x$$

$$xu'(x) = x\sin x$$

$$u'(x) = \frac{x\sin x}{x}$$

$$u'(x) = \sin x$$

Integrando, se obtiene:

$$u(x) = -\cos x + K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$y = (-\cos x + K_1)x$$

$$\boldsymbol{y = -x\cos x + K_1 x}$$

5. $(y^3 - y)dx + (xy^2 - x - y^2 + 1)dy = 0$

Solución:

$$(y^3 - y)dx + (xy^2 - x - y^2 + 1)dy = 0$$

$$y^3 - y + (xy^2 - x - y^2 + 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(xy^2 - x - y^2 + 1)\frac{dy}{dx} = y - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^3}{xy^2 - x - y^2 + 1}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{xy^2-x-y^2+1} - \frac{y^3}{xy^2-x-y^2+1}$, no es posible escribir la ED en la forma lineal en y.

$(y^3 - y)\frac{dx}{dy} + (xy^2 - x - y^2 + 1) = 0$

$\frac{1}{y^3-y}\left[(y^3 - y)\frac{dx}{dy} + (xy^2 - x - y^2 + 1) = 0\right]$

$\frac{1}{y^3-y}(y^3 - y)\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y^3-y}(xy^2 - x - y^2 + 1) = \frac{1}{y^3-y} \cdot 0\ ; \quad y \neq \{-1, 0, 1\}$

$\frac{dx}{dy} + \frac{xy^2-x-y^2+1}{y^3-y} = 0$

$\frac{dx}{dy} + \frac{xy^2-x}{y^3-y} - \frac{y^2-1}{y^3-y} = 0$

$\frac{dx}{dy} + \frac{x(y^2-1)}{y(y^2-1)} - \frac{y^2-1}{y(y^2-1)} = 0$

$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} = 0$

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = \frac{1}{y}$, la ED es lineal en x.

Sea:

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(y) = \frac{1}{y}$

$x = Ke^{-\int f(y)dy}$

$x = Ke^{-\int \frac{1}{y}dy}$

$x = Ke^{-\ln y}$

$x = Ke^{\ln y^{-1}}$

$x = Ky^{-1}$

Suponemos que:

$x = u(y)y^{-1}$, es solución general de $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = \frac{1}{y}$.

Calculamos la primera derivada de x.

$$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}[u(y)y^{-1}]$$

$$\frac{dx}{dy} = y^{-1}\frac{d}{dy}[u(y)] + u(y)\frac{d}{dy}(y^{-1})$$

$$\frac{dx}{dy} = y^{-1}u'(y) + u(y)(-y^{-2})$$

$$\frac{dx}{dy} = y^{-1}u'(y) - u(y)y^{-2}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$y^{-1}u'(y) - u(y)y^{-2} + \frac{1}{y}u(y)y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$y^{-1}u'(y) - \cancel{u(y)y^{-2}} + \cancel{u(y)y^{-2}} = \frac{1}{y}$$

$$y^{-1}u'(y) = \frac{1}{y}$$

$$u'(y) = \frac{1}{y^{-1}y}$$

$$u'(y) = \frac{1}{1}$$

$$u'(y) = 1$$

Integrando, se obtiene:

$$u(y) = y + K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$\boldsymbol{x = (y + K_1)y^{-1}}$$

6. $dx - (1 + 2x \tan y)dy = 0$

Solución:

$dx - (1 + 2x \tan y)dy = 0$

$\frac{dx}{dy} - (1 + 2x \tan y) = 0$

$\frac{dx}{dy} - 1 - 2x \tan y = 0$

$\frac{dx}{dy} - 2x \tan y = 1$

$\frac{dx}{dy} - (2 \tan y)x = 1$, la ED es lineal en x.

Sea:

$\frac{dx}{dy} - (2 \tan y)x = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(y) = -2 \tan y$

$x = Ke^{-\int f(y)dy}$

$x = Ke^{-\int(-2 \tan y)dy}$

$x = Ke^{-2\int(-\tan y)dy}$

$x = Ke^{-2\int\frac{-\sin y}{\cos y}dy}$

$x = Ke^{-2 \ln \cos y}$

$x = Ke^{\ln(\cos y)^{-2}}$

$x = K(\cos y)^{-2}$

Supongamos que:

$x = u(y)(\cos y)^{-2}$, es solución general de $\frac{dx}{dy} - (2 \tan y)x = 1$.

Calculamos la primera derivada de x.

$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}[u(y)(\cos y)^{-2}]$

$$\frac{dx}{dy} = (\cos y)^{-2}\frac{d}{dy}[u(y)] + u(y)\frac{d}{dy}[(\cos y)^{-2}]$$

$$\frac{dx}{dy} = (\cos y)^{-2}u'(y) + u(y)[-2(\cos y)^{-3}(-\sin y)]$$

$$\frac{dx}{dy} = (\cos y)^{-2}u'(y) + 2u(y)\sin y\,(\cos y)^{-3}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$(\cos y)^{-2}u'(y) + 2u(y)\sin y\,(\cos y)^{-3} - (2\tan y)u(y)(\cos y)^{-2} = 1$$

$$(\cos y)^{-2}u'(y) + 2u(y)\sin y\,(\cos y)^{-3} - 2\frac{\sin y}{\cos y}u(y)(\cos y)^{-2} = 1$$

$$(\cos y)^{-2}u'(y) + 2u(y)\sin y\,(\cos y)^{-3} - 2u(y)\sin y\,(\cos y)^{-1}(\cos y)^{-2} = 1$$

$$(\cos y)^{-2}u'(y) + \cancel{2u(y)\sin y\,(\cos y)^{-3}} - \cancel{2u(y)\sin y\,(\cos y)^{-3}} = 1$$

$$(\cos y)^{-2}u'(y) = 1$$

$$u'(y) = \frac{1}{(\cos y)^{-2}}$$

$$u'(y) = (\cos y)^2$$

$$u'(y) = \cos^2 y$$

$$u'(y) = \frac{1+\cos 2y}{2}$$ Usando la identidad: $\cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}$.

$$\int u'(y) = \int \frac{1+\cos 2y}{2}dy$$

$$u(y) = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2y}{2}\right)dy$$

$$u(y) = \int \frac{1}{2}dy + \int \frac{\cos 2y}{2}dy$$

$$u(y) = \frac{1}{2}y + \frac{\sin 2y}{4} + K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$x = \left(\frac{1}{2}y + \frac{\sin 2y}{4} + K_1\right)(\cos y)^{-2}$$

$$x = \frac{\left(\frac{1}{2}y + \frac{\sin 2y}{4} + K_1\right)}{(\cos y)^2}$$

$2\left[x(\cos y)^2 = \frac{1}{2}y + \frac{\sin 2y}{4} + K_1\right]$

$2x\cos^2 y = 2\frac{1}{2}y + 2\frac{\sin 2y}{4} + 2K_1$

$2x\cos^2 y = y + \frac{2\cdot 2\sin y\cos y}{4} + K_2; \quad K_2 = 2K_1$

$\boldsymbol{2x\cos^2 y = y + \sin y\cos y + K_2}$

7. $x^2 dy - \sin 2x\, dx + 3xydx = 0$

Solución:

$x^2 dy - \sin 2x\, dx + 3xydx = 0$

$x^2 dy + (-\sin 2x\, dx + 3xydx) = 0$

$x^2 dy + (-\sin 2x + 3xy)dx = 0$

$x^2\frac{dy}{dx} + (-\sin 2x + 3xy) = 0$

$\frac{1}{x^2}\left[x^2\frac{dy}{dx} + (-\sin 2x + 3xy) = 0\right]$

$\frac{1}{x^2}x^2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}(-\sin 2x + 3xy) = \frac{1}{x^2}\cdot 0; \quad x^2 \neq 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{\sin 2x}{x^2} + \frac{3xy}{x^2} = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{\sin 2x}{x^2} + \frac{3y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{\sin 2x}{x^2}$, la ED es lineal y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = \frac{3}{x}$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int \frac{3}{x} dx}$

$y = Ke^{-3\int \frac{1}{x} dx}$

$y = Ke^{-3 \ln x}$

$y = Ke^{\ln x^{-3}}$

$y = Kx^{-3}$

Supongamos que:

$y = u(x)x^{-3}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} y = \frac{\sin 2x}{x^2}$.

Calculamos la primera derivada de y.

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} [u(x)x^{-3}]$

$\frac{dy}{dx} = x^{-3} \frac{d}{dx} [u(x)] + u(x) \frac{d}{dx} (x^{-3})$

$\frac{dy}{dx} = x^{-3} u'(x) + u(x)(-3x^{-4})$

$\frac{dy}{dx} = x^{-3} u'(x) - 3u(x)x^{-4}$

Sustituyendo, se obtiene:

$x^{-3} u'(x) - 3u(x)x^{-4} + \frac{3}{x} u(x)x^{-3} = \frac{\sin 2x}{x^2}$

$x^{-3} u'(x) - 3u(x)x^{-4} + 3u(x)x^{-1}x^{-3} = \frac{\sin 2x}{x^2}$

$x^{-3} u'(x) - \cancel{3u(x)x^{-4}} + \cancel{3u(x)x^{-4}} = \frac{\sin 2x}{x^2}$

$x^{-3} u'(x) = \frac{\sin 2x}{x^2}$

$u'(x) = \frac{\sin 2x}{x^{-3}x^2}$

$u'(x) = \frac{\sin 2x}{x^{-1}}$

$u'(x) = x \sin 2x$

$\int u'(x) = \int x \sin 2x \, dx$

$u(x) = \int x \sin 2x \, dx$

Resolviendo la integral por sustitución.

$t = 2x$ $\qquad \frac{t}{2} = x$

$\frac{d}{dx} t = \frac{d}{dx}(2x)$ $\qquad x = \frac{t}{2}$

$\frac{dt}{dx} = 2 \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2}$

$u(x) = \int \frac{t}{2} \sin t \frac{dt}{2}$

$u(x) = \frac{1}{4} \int t \sin t \, dt$

$u(x) = \frac{1}{4} [t(-\cos t) - \int -\cos t \, dt]$

$u(x) = \frac{1}{4} [-t \cos t + \int \cos t \, dt]$

$u(x) = \frac{1}{4} [-t \cos t + \sin t] + K_1$

Aplicando integración por parte.

$u = t$ $\qquad dv = \sin t \, dt$

$\frac{d}{dt} u = \frac{d}{dt} t$ $\qquad \int dv = \int \sin t \, dt$

$\frac{du}{dt} = 1$ $\qquad v = -\cos t$

$du = dt$

Escribiendo $u(x)$ en términos de x.

$u(x) = \frac{1}{4}(-2x \cos 2x + \sin 2x) + K_1$

Luego, la solución general de la ED es:

$\boldsymbol{y = \left[\frac{1}{4}(-2x \cos 2x + \sin 2x) + K_1\right] x^{-3}}$

8. $2y' + 4xy = \cos x$

Solución:

$2y' + 4xy = \cos x$

$\frac{1}{2}(2y' + 4xy = \cos x)$

$$\frac{1}{2}\cdot 2y' + \frac{1}{2}\cdot 4xy = \frac{1}{2}\cdot \cos x$$

$$y' + 2xy = \frac{\cos x}{2}$$

$\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{\cos x}{2}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$, la ED homogénea asociado.

$$f(x) = 2x$$

$$y = Ke^{-\int f(x)dx}$$

$$y = Ke^{-\int 2xdx}$$

$$y = Ke^{-x^2}$$

Supongamos que:

$y = u(x)e^{-x^2}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{\cos x}{2}$.

Calculamos la primera derivada de y.

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left[u(x)e^{-x^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}u'(x) + u(x)\left(-2xe^{-x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}u'(x) - 2xu(x)e^{-x^2}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$e^{-x^2}u'(x) - \cancel{2xu(x)e^{-x^2}} + \cancel{2xu(x)e^{-x^2}} = \frac{\cos x}{2}$$

$$e^{-x^2}u'(x) = \frac{\cos x}{2}$$

$$u'(x) = \frac{\cos x}{2e^{-x^2}}$$

$$u'(x) = \frac{e^{x^2}\cos x}{2}$$

Integrando, obtiene:

$$\int u'(x) = \int \frac{e^{x^2}\cos x}{2} dx + C$$

$$u(x) = \int \frac{e^{x^2}\cos x}{2} dx + C$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\int e^{x^2}\cos x\, dx + C\right) e^{-x^2}$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{2}\int e^{x^2}\cos x\, dx + C\right) e^{-x^2}}$$

Observación:

En caso contrario a las derivadas, algunas integrales no se pueden resolver o son muy difíciles de resolver y esto es porque ninguna técnica puede ni podrá que tales integrales se puedan expresar en términos de funciones elementales, por lo que a estas integrales se recurre a aproximarlas numéricamente.

Algunos ejemplos:

1. $\int e^{-x^2} dx$ (integral gaussiana)
2. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (integral seno integral)
3. $\int \frac{1}{\ln x} dx$ (integral logarítmica)
4. $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (integral coseno integral)
5. $\int \frac{1}{x^x} dx$ (integral de potencia a una potencia).

9. $y' \cos x + y = \cos^2 x$

Solución:

$y' \cos x + y = \cos^2 x$

$\frac{dy}{dx} \cos x + y = \cos^2 x$

$\frac{1}{\cos x}\left(\frac{dy}{dx} \cos x + y\right) = \frac{1}{\cos x} \cdot \cos^2 x$

$\frac{dy}{dx} \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x + \frac{1}{\cos x} y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos x} y = \cos x$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos x} y = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = \frac{1}{\cos x}$

$y = Ke^{-\int f(x) dx}$

$y = Ke^{-\int \frac{1}{\cos x} dx}$

$y = Ke^{-\int \sec x dx}$

$y = Ke^{-\ln(\sec x + \tan x)}$

$y = \dfrac{K}{e^{\ln(\sec x + \tan x)}}$

$y = \dfrac{K}{\sec x + \tan x}$

$y = K(\sec x + \tan x)^{-1}$

Supongamos que:

$y = u(x)(\sec x + \tan x)^{-1}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos x} y = \cos x$.

Calculemos la derivada de y.

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}[u(x)(\sec x + \tan x)^{-1}]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^{-1}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}[(\sec x + \tan x)^{-1}]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) + u(x)\left[-(\sec x + \tan x)^{-2}\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) + u(x)\left[-(\sec x + \tan x)^{-2}\left(\frac{d}{dx}\sec x + \frac{d}{dx}\tan x\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) + u(x)[-(\sec x + \tan x)^{-2}(\sec x \tan x + \sec^2 x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) + u(x)[-(\sec x + \tan x)^{-2}(\tan x + \sec x)\sec x]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) + u(x)[-(\sec x + \tan x)^{-2}(\sec x + \tan x)\sec x]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) - u(x)\sec x\,(\sec x + \tan x)^{-1}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$(\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) - u(x)\sec x\,(\sec x + \tan x)^{-1} + \frac{1}{\cos x}u(x)(\sec x + \tan x)^{-1} = \cos x$$

$$(\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) - u(x)\sec x\,(\sec x + \tan x)^{-1} + u(x)\sec x\,(\sec x + \tan x)^{-1} = \cos x$$

$$(\sec x + \tan x)^{-1}u'(x) = \cos x$$

$$u'(x) = \frac{\cos x}{(\sec x + \tan x)^{-1}}$$

$$u'(x) = \cos x\,(\sec x + \tan x)$$

$$u'(x) = \cos x \sec x + \cos x \tan x$$

$$u'(x) = 1 + \cos x\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u'(x) = 1 + \sin x$$

Integrando, se obtiene:

$$u(x) = x - \cos x + K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$y = (x - \cos x + K_1)(\sec x + \tan x)^{-1}$

$\boldsymbol{y = \dfrac{x - \cos x + K_1}{\sec x + \tan x}}$

10. $y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

Solución:

$y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + y = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = 1$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int 1dx}$

$y = Ke^{-x}$

Supongamos que:

$y = u(x)e^{-x}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$.

Calculamos la derivada de y.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}[u(x)e^{-x}]$

$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}(e^{-x})$

$\frac{dy}{dx} = e^{-x}u'(x) + u(x)(-e^{-x})$

$\frac{dy}{dx} = e^{-x}u'(x) - u(x)e^{-x}$

Sustituyendo, se obtiene:

$e^{-x}u'(x) - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^{2x}}$

$$e^{-x}u'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$u'(x) = \frac{1}{e^{-x}(1+e^{2x})}$$

$$u'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\int u'(x) = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$u(x) = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$u(x) = \int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2}$$

$$u(x) = \int \frac{dv}{1+v^2}$$

$$u(x) = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$u(x) = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta}; \quad \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$$

$$u(x) = \int d\theta$$

$$u(x) = \theta + K_1$$

Escribiendo con la variable original y.

$$u(x) = \tan^{-1} v + K_1$$

$$u(x) = \tan^{-1} e^x + K_1$$

Sustitución.

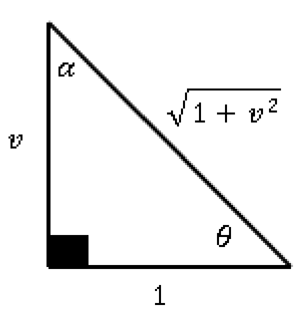
$v = e^x$

$\frac{d}{dx}v = \frac{d}{dx}e^x$

$\frac{dv}{dx} = e^x$

$dv = e^x dx$

Sustitución trigonométrica.



$\tan\theta = v \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} v$

$v = \tan\theta \quad \rightarrow \quad v^2 = \tan^2\theta$

$\frac{d}{d\theta}v = \frac{d}{d\theta}\tan\theta$

$\frac{dv}{d\theta} = \sec^2\theta$

$dv = \sec^2\theta\, d\theta$

Luego, la solución general de la ED es:

$y = (\tan^{-1} e^x + K_1)e^{-x}$

$\boldsymbol{y = e^{-x} \tan^{-1} e^x + K_1 e^{-x}}$

11. $y'(x \cos y + a \sin 2y) = 1$

Solución:

$\frac{dy}{dx}(x \cos y + a \sin 2y) = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + a \sin 2y}$, la ED no es lineal en y.

¿Será lineal en x?

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + a \sin 2y}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x \cos y + a \sin 2y}{1}$

$\frac{dx}{dy} = x \cos y + a \sin 2y$

$\frac{dx}{dy} - x \cos y = a \sin 2y$

$\frac{dx}{dy} - (\cos y)x = a \sin 2y$, la ED es lineal en x.

Sea:

$\frac{dx}{dy} - (\cos y)x = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(y) = -\cos y$

$x = Ke^{-\int f(y)dy}$

$x = Ke^{-\int -\cos y dy}$

$x = Ke^{\int \cos y dy}$

$x = Ke^{\sin y}$

Supongamos que:

$x = u(y)e^{\sin y}$, es solución general de $\frac{dx}{dy} - (\cos y)x = a \sin 2y$.

Calculamos la primera derivada de x.

$$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}\left[u(y)e^{\sin y}\right]$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{\sin y}\frac{d}{dy}[u(y)] + u(y)\frac{d}{dy}\left(e^{\sin y}\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{\sin y}u'(y) + u(y)\left(e^{\sin y}\right)\frac{d}{dy}(\sin y)$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{\sin y}u'(y) + u(y)e^{\sin y}\cos y$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$e^{\sin y}u'(y) + u(y)e^{\sin y}\cos y - (\cos y)u(y)e^{\sin y} = a \sin 2y$$

$$e^{\sin y}u'(y) + \cancel{u(y)e^{\sin y}\cos y} - \cancel{u(y)e^{\sin y}\cos y} = a \sin 2y$$

$$e^{\sin y}u'(y) = a \sin 2y$$

$$u'(y) = \frac{a \sin 2y}{e^{\sin y}}$$

$$\int u'(y) = \int \frac{a \sin 2y}{e^{\sin y}}dy$$

$$u(y) = \int \frac{2a \sin y \cos y}{e^{\sin y}}dy$$

$$u(y) = 2a\int \frac{\sin y \cos y}{e^{\sin y}}dy$$

$$u(y) = 2a\int \sin y \cos y \, e^{-\sin y}\, dy$$

$$u(y) = 2a\int \sin y \, e^{-\sin y} \cos y \, dy$$

$$u(y) = 2a\int (-r)e^{r}\,(-dr)$$

Sustitución.

$r = -\sin y \quad \rightarrow \quad -r = \sin y$

$\frac{d}{dy}r = \frac{d}{dy}(-\sin y)$

$\frac{dr}{dy} = -\frac{d}{dy}\sin y$

$\frac{dr}{dy} = -\cos y$

$dr = -\cos y \, dy$

$-dr = \cos y \, dy$

$$u(y) = 2a\int re^r dr$$

$$u(y) = 2a\left(re^r - \int e^r dr\right) + K_1$$

$$u(y) = 2a(re^r - e^r) + K_1$$

Escribiendo con la ecuación en términos de y.

$$u(y) = 2a\left((-\sin y)e^{-\sin y} - e^{-\sin y}\right) + K_1$$

$$u(y) = 2a\left(-\sin y\, e^{-\sin y} - e^{-\sin y}\right) + K_1$$

$$u(y) = -2a(\sin y + 1)e^{-\sin y} + K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$x = \left[-2a(\sin y + 1)e^{-\sin y} + K_1\right]e^{\sin y}$$

$$x = -2a(\sin y + 1)e^{-\sin y}e^{\sin y} + K_1 e^{\sin y}$$

$$x = -2a(\sin y + 1) + K_1 e^{\sin y}$$

$$\boldsymbol{x = K_1 e^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)}$$

Integración por partes.

$u = r$ $\quad dv = e^r dr$

$\frac{d}{dr}u = \frac{d}{dr}r$ $\quad \int dv = \int e^r dr$

$\frac{du}{dr} = 1$ $\quad v = e^r$

$du = dr$

12. $y'x\ln x - (1 + \ln x)y + \frac{\sqrt{x}}{2}(2 + \ln x) = 0$

Solución:

$$y'x\ln x - (1 + \ln x)y + \frac{\sqrt{x}}{2}(2 + \ln x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}x\ln x - (1 + \ln x)y = -\frac{\sqrt{x}}{2}(2 + \ln x)$$

$$\frac{1}{x\ln x}\left[\frac{dy}{dx}x\ln x - (1 + \ln x)y\right] = \frac{1}{x\ln x}\left[-\frac{\sqrt{x}}{2}(2 + \ln x)\right]$$

$$\frac{1}{x\ln x}\cdot\frac{dy}{dx}x\ln x - \frac{1}{x\ln x}(1 + \ln x)y = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x}(2 + \ln x)$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1+\ln x}{x\ln x}y = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x}(2+\ln x)$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} - \frac{1+\ln x}{x\ln x}y = 0$, la ED homogénea asociado.

$$f(x) = -\frac{1+\ln x}{x\ln x}$$

$$y = Ke^{-\int f(x)dx}$$

$$y = Ke^{-\int -\frac{1+\ln x}{x\ln x}dx}$$

$$y = Ke^{\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx}$$

$$y = Ke^{\int \left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{\ln x}{x\ln x}\right)dx}$$

$$y = Ke^{\int \left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{1}{x}\right)dx}$$

$$y = Ke^{\int \frac{1}{x\ln x}dx+\int \frac{1}{x}dx}$$

$$y = Ke^{\ln(\ln x)+\ln x}$$

$$y = Ke^{\ln(x\ln x)}$$

$$y = Kx\ln x$$

Supongamos que:

$y = u(x)x\ln x$, es solución general de $\frac{dy}{dx} - \frac{1+\ln x}{x\ln x}y = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x}(2+\ln x)$.

Calculamos la derivada de y.

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}[u(x)x\ln x]$$

$$\frac{dy}{dx} = x\ln x\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\ln x\frac{d}{dx}(x) + xu(x)\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x\ln x\,u'(x) + u(x)\ln x\,(1) + xu(x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x\ln x\, u'(x) + u(x)\ln x + u(x)$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$x\ln x\, u'(x) + u(x)\ln x + u(x) - \frac{1+\ln x}{x\ln x}u(x)x\ln x = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x}(2+\ln x)$$

$$x\ln x\, u'(x) + u(x)\ln x + u(x) - (1+\ln x)u(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x}(2+\ln x)$$

$$x\ln x\, u'(x) + u(x)\ln x + u(x) - u(x) - u(x)\ln x = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x}(2+\ln x)$$

$$x\ln x\, u'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x}(2+\ln x)$$

$$u'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x\ln x\,(x\ln x)}(2+\ln x)$$

$$u'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2(\ln x)^2}(2+\ln x)$$

$$u'(x) = -\frac{2\sqrt{x}}{2x^2(\ln x)^2} - \frac{\sqrt{x}\ln x}{2x^2(\ln x)^2}$$

$$u'(x) = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2(\ln x)^2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2x^2\ln x}$$

$$u'(x) = -\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^2} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}\ln x}$$

$$\int u'(x) = \int \left[-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}x(\ln x)^2} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}x\ln x}\right]dx$$

$$u(x) = -\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}x(\ln x)^2}dx - \int \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}x\ln x}dx$$

$$u(x) = -\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

Sustitución.

$z = \ln x \quad \rightarrow \quad x = e^z$

$\frac{d}{dx}z = \frac{d}{dx}\ln x$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

$dz = \frac{1}{x}dx$

$$u(x) = -\int \frac{1}{(e^z)^{\frac{1}{2}}(z)^2} dz - \int \frac{1}{2(e^z)^{\frac{1}{2}} z} dz$$

$$u(x) = -\int \frac{1}{e^{\frac{1}{2}z} z^2} dz - \int \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}z} z} dz$$

$$u(x) = -\int \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z^2} dz - \int \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2z} dz$$

$$u(x) = -\left(-\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z} - \int -\frac{1}{z} \cdot -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz\right) - \int \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2z} dz + K_1$$

$$u(x) = -\left(-\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z} - \int \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2z} dz\right) - \int \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2z} dz + K_1$$

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z} + \int \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2z} dz - \int \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2z} dz + K_1$$

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z} + K_1$$

$$u(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}z} z} + K_1$$

$$u(x) = \frac{1}{(e^z)^{\frac{1}{2}} z} + K_1$$

Integración por partes.

$$u = e^{-\frac{1}{2}z} \qquad dv = \frac{1}{z^2} dz$$

$$\frac{d}{dz} u = \frac{d}{dz}\left(e^{-\frac{1}{2}z}\right) \qquad \int dv = \int \frac{1}{z^2} dz$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} \qquad v = -\frac{1}{z}$$

$$du = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz$$

Escribiendo en términos de x.

$$u(x) = \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}} \ln x} + K_1$$

$$u(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \ln x} + K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$y = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \ln x} + K_1\right) x \ln x$$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \ln x} x \ln x + K_1 x \ln x$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} + K_1 x \ln x$$

$$\boldsymbol{y = \sqrt{x} + K_1 x \ln x}$$

13. $y - xy' = y'y^2e^y$

Solución:

$$y - xy' = y'y^2e^y$$

$$y = xy' + y'y^2e^y$$

$$y = y'(x + y^2e^y)$$

$$\frac{y}{x + y^2e^y} = y'$$

$$y' = \frac{y}{x + y^2e^y}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^2e^y}$, la ED no es lineal en y.

¿Será lineal en x?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^2e^y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2e^y}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \frac{y^2e^y}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} x + ye^y$$

$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = ye^y$, la ED es lineal en x.

Sea:

$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(y) = -\frac{1}{y}$

$x = Ke^{-\int f(y)dy}$

$x = Ke^{-\int -\frac{1}{y}dy}$

$x = Ke^{\int \frac{1}{y}dy}$

$x = Ke^{\ln y}$

$x = Ky$

Supongamos que:

$x = u(y)y$, es solución general de $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = ye^y$.

Calculamos la derivada de x.

$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}[u(y)y]$

$$\frac{dx}{dy} = y\frac{d}{dy}[u(y)] + u(y)\frac{d}{dy}(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = yu'(y) + u(y)(1)$$

$$\frac{dx}{dy} = yu'(y) + u(y)$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$yu'(y) + u(y) - \frac{1}{y}u(y)y = ye^y$$

$$yu'(y) + u(y) - u(y) = ye^y$$

$yu'(y) = ye^y$

$u'(y) = \frac{ye^y}{y}$

$u'(y) = e^y$

Integrando, se obtiene:

$u(y) = e^y + K_1$

Luego, la solución general de la ED es:

$x = (e^y + K_1)y$

$\boldsymbol{x = ye^y + K_1 y}$

14. $ydx + (xy + 2x - ye^y)dy = 0$

Solución:

$ydx + (xy + 2x - ye^y)dy = 0$

$ydx = -(xy + 2x - ye^y)dy$

$\frac{dx}{dy} = \frac{-(xy + 2x - ye^y)}{y}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{-xy - 2x + ye^y}{y}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{-xy - 2x}{y} + \frac{ye^y}{y}$

$\frac{dx}{dy} = -\frac{(y+2)x}{y} + e^y$

$\frac{dx}{dy} + \frac{y+2}{y}x = e^y$, la ED es lineal en x.

Sea:

$\frac{dx}{dy} + \frac{y+2}{y}x = 0$, la ED homogénea asociado.

$$f(y) = \frac{y+2}{y}$$

$$x = Ke^{-\int f(y)dy}$$

$$x = Ke^{-\int f(y)dy}$$

$$x = Ke^{-\int \frac{y+2}{y}dy}$$

$$x = Ke^{-\int \left(\frac{y}{y}+\frac{2}{y}\right)dy}$$

$$x = Ke^{-\int \left(1+\frac{2}{y}\right)dy}$$

$$x = Ke^{-\left(\int dy+2\int \frac{1}{y}dy\right)}$$

$$x = Ke^{-(y+2\ln y)}$$

$$x = Ke^{-\left(y+\ln y^2\right)}$$

$$x = \frac{K}{e^{y+\ln y^2}}$$

$$x = \frac{K}{e^{y}e^{\ln y^2}}$$

$$x = \frac{K}{e^{y}y^2}$$

$$x = Ke^{-y}y^{-2}$$

Supongamos que:

$x = u(y)e^{-y}y^{-2}$, es solución general de $\frac{dx}{dy} + \frac{y+2}{y}x = e^{y}$.

Calculamos la derivada de x.

$$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}\left[u(y)e^{-y}y^{-2}\right]$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{-y}y^{-2}\frac{d}{dy}[u(y)] + u(y)y^{-2}\frac{d}{dy}(e^{-y}) + u(y)e^{-y}\frac{d}{dy}(y^{-2})$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{-y}y^{-2}u'(y) + u(y)y^{-2}(-e^{-y}) + u(y)e^{-y}(-2y^{-3})$$

$$\frac{dx}{dy} = e^{-y}y^{-2}u'(y) - u(y)y^{-2}e^{-y} - 2u(y)y^{-3}e^{-y}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$e^{-y}y^{-2}u'(y) - u(y)y^{-2}e^{-y} - 2u(y)y^{-3}e^{-y} + \frac{y+2}{y}u(y)e^{-y}y^{-2} = e^{y}$$

$$e^{-y}y^{-2}u'(y) - u(y)y^{-2}e^{-y} - 2u(y)y^{-3}e^{-y} + \left(\frac{y}{y} + \frac{2}{y}\right)u(y)e^{-y}y^{-2} = e^{y}$$

$$e^{-y}y^{-2}u'(y) - u(y)y^{-2}e^{-y} - 2u(y)y^{-3}e^{-y} + (1 + 2y^{-1})u(y)e^{-y}y^{-2} = e^{y}$$

$$e^{-y}y^{-2}u'(y) - u(y)y^{-2}e^{-y} - 2u(y)y^{-3}e^{-y} + u(y)y^{-2}e^{-y} + 2u(y)y^{-3}e^{-y} = e^{y}$$

$$e^{-y}y^{-2}u'(y) = e^{y}$$

$$u'(y) = \frac{e^{y}}{e^{-y}y^{-2}}$$

$$u'(y) = y^{2}e^{y}e^{y}$$

$$u'(y) = y^{2}e^{2y}$$

$$\int u'(y) = \int y^{2}e^{2y}dy$$

$$u(y) = \int y^{2}e^{2y}dy$$

$$u(y) = \int \left(\frac{z}{2}\right)^{2} e^{z}\frac{dz}{2}$$

$$u(y) = \int \frac{z^{2}}{4}e^{z}\frac{dz}{2}$$

$$u(y) = \frac{1}{8}\int z^{2}e^{z}dz$$

$$u(y) = \frac{1}{8}\left(z^{2}e^{z} - \int 2ze^{z}dz\right) + K_{1}$$

$$u(y) = \frac{1}{8}\left(z^{2}e^{z} - 2\int ze^{z}dz\right) + K_{1}$$

Sustitución.

$z = 2y \quad \rightarrow \quad y = \frac{z}{2}$

$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(2y)$

$\frac{dz}{dy} = 2$

$\frac{dz}{2} = dy$

Integración por partes.

$u = z^{2}$ $dv = e^{z}dz$

$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz}z^{2}$ $\int dv = \int e^{z}dz$

$\frac{du}{dz} = 2z$ $v = e^{z}$

$du = 2zdz$

Aplicando integración por partes nuevamente.

$$u(y)=\frac{1}{8}\left(z^2e^z-2\left(ze^z-\int e^z dz\right)\right)+K_1$$

$$u(y)=\frac{1}{8}\left(z^2e^z-2(ze^z-e^z)\right)+K_1$$

$$u(y)=\frac{1}{8}(z^2e^z-2ze^z+2e^z)+K_1$$

Integración por partes.

$u=z$ $dv=e^z dz$

$\frac{du}{dz}=\frac{d}{dz}z$ $\int dv=\int e^z dz$

$\frac{du}{dz}=1$ $v=e^z$

$du=dz$

Escribiendo en términos de y.

$$u(y)=\frac{1}{8}((2y)^2e^{2y}-2\cdot 2ye^{2y}+2e^{2y})+K_1$$

$$u(y)=\frac{1}{8}(4y^2e^{2y}-4ye^{2y}+2e^{2y})+K_1$$

$$u(y)=\frac{4y^2e^{2y}}{8}-\frac{4ye^{2y}}{8}+\frac{2e^{2y}}{8}+K_1$$

$$u(y)=\frac{y^2e^{2y}}{2}-\frac{ye^{2y}}{2}+\frac{e^{2y}}{4}+K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$x=\left(\frac{y^2e^{2y}}{2}-\frac{ye^{2y}}{2}+\frac{e^{2y}}{4}+K_1\right)y^{-2}e^{-y}$$

$$x=\frac{y^2e^{2y}}{2}y^{-2}e^{-y}-\frac{ye^{2y}}{2}y^{-2}e^{-y}+\frac{e^{2y}}{4}y^{-2}e^{-y}+K_1y^{-2}e^{-y}$$

$$x=\frac{e^y}{2}-\frac{e^y}{2}y^{-1}+\frac{e^y}{4}y^{-2}+K_1y^{-2}e^{-y}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{e^y}{2}-\frac{e^y}{2y}+\frac{e^y}{4y^2}+\frac{K_1}{y^2e^y}}$$

15. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 3; \qquad y(0) = 4$

Solución:

$$\sqrt{1-x^2}y' + y = 3$$

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + y = 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + y\right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$, la ED homogénea asociado.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = Ke^{-\int f(x)dx}$$

$$y = Ke^{-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}$$

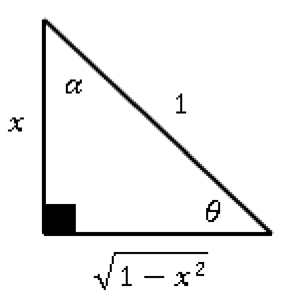
$$y = Ke^{-\int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta}$$

$$y = Ke^{-\int d\theta}$$

$$y = Ke^{-\theta}$$

$$y = Ke^{-\sin^{-1}x}$$

Sustitución trigonométrica.



$\sin\theta = x \quad \rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}x$

$x = \sin\theta \qquad \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{d}{d\theta}x = \frac{d}{d\theta}\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

$$dx = \cos\theta\, d\theta$$

Supongamos que:

$y = u(x)e^{-\sin^{-1}x}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$.

Calculamos la derivada de y.

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left[u(x)e^{-\sin^{-1}x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin^{-1}x}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}\left(e^{-\sin^{-1}x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin^{-1}x}u'(x) + u(x)\left(e^{-\sin^{-1}x}\right)\frac{d}{dx}(-\sin^{-1}x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin^{-1}x}u'(x) + u(x)\left(e^{-\sin^{-1}x}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\sin^{-1}x}u'(x) - \frac{u(x)e^{-\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$e^{-\sin^{-1}x}u'(x) - \frac{u(x)e^{-\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}u(x)e^{-\sin^{-1}x} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$e^{-\sin^{-1}x}u'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$u'(x) = \frac{3}{e^{-\sin^{-1}x}\sqrt{1-x^2}}$$

$$u'(x) = \frac{3e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Integrando, se obtiene:

$$u(x) = 3e^{\sin^{-1}x} + K_1$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$y = \left(3e^{\sin^{-1}x} + K_1\right)e^{-\sin^{-1}x}$$

Calculando la solución particular de la ED para $x = 0$, $y = 4$.

$$4 = \left(3e^{\sin^{-1}0} + K_1\right)e^{-\sin^{-1}0}$$

$$\frac{4}{e^{-\sin^{-1}0}} = 3e^{\sin^{-1}0} + K_1$$

$4e^{\sin^{-1} 0} = 3e^{\sin^{-1} 0} + K_1$

$4e^{\sin^{-1} 0} - 3e^{\sin^{-1} 0} = K_1$

$e^{\sin^{-1} 0} = K_1$

$e^0 = K_1$

$1 = K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = 1$

$y = \left(3e^{\sin^{-1} x} + 1\right)e^{-\sin^{-1} x}$

$y = 3e^{\sin^{-1} x}e^{-\sin^{-1} x} + e^{-\sin^{-1} x}$

$\boldsymbol{y = 3 + e^{-\sin^{-1} x}}$

16. $xy' - xy - 3y - x^2 - 2x = 0; \quad y(1) = e - 1$

Solución:

$xy' - xy - 3y - x^2 - 2x = 0$

$xy' - xy - 3y = x^2 + 2x$

$$x\frac{dy}{dx} - (x+3)y = x(x+2)$$

$$\frac{1}{x}\left[x\frac{dy}{dx} - (x+3)y\right] = \frac{1}{x} \cdot x(x+2); \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x}x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}(x+3)y = x + 2$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{x+3}{x}y = x + 2$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} - \frac{x+3}{x}y = 0$, la ED homogénea asociado.

$$f(x) = -\frac{x+3}{x}$$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int -\frac{x+3}{x}dx}$

$y = Ke^{\int \frac{x+3}{x}dx}$

$y = Ke^{\int \left(\frac{x}{x}+\frac{3}{x}\right)dx}$

$y = Ke^{\int \left(1+\frac{3}{x}\right)dx}$

$y = Ke^{\int dx+3\int \frac{1}{x}dx}$

$y = Ke^{x+3\ln x}$

$y = Ke^{x+\ln x^3}$

$y = Ke^{x}e^{\ln x^3}$

$y = Ke^{x}x^3$

$y = Kx^3e^{x}$

Supongamos que:

$y = u(x)x^3e^x$, es solución general de $\frac{dy}{dx} - \frac{x+3}{x}y = x + 2$.

Calculamos la derivada de y.

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}[u(x)x^3e^x]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3e^x\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)e^x\frac{d}{dx}(x^3) + u(x)x^3\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3e^xu'(x) + u(x)e^x(3x^2) + u(x)x^3(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3e^xu'(x) + 3u(x)x^2e^x + u(x)x^3e^x$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$x^3e^xu'(x) + 3u(x)x^2e^x + u(x)x^3e^x - \frac{x+3}{x}u(x)x^3e^x = x + 2$$

$$x^3e^xu'(x) + 3u(x)x^2e^x + u(x)x^3e^x - \left(\frac{x}{x} + \frac{3}{x}\right)u(x)x^3e^x = x + 2$$

$$x^3e^xu'(x) + 3u(x)x^2e^x + u(x)x^3e^x - (1 + 3x^{-1})u(x)x^3e^x = x + 2$$

$$x^3e^xu'(x) \cancel{+ 3u(x)x^2e^x} \cancel{+ u(x)x^3e^x} \cancel{- u(x)x^3e^x} \cancel{- 3u(x)x^2e^x} = x + 2$$

$$x^3e^xu'(x) = x + 2$$

$$u'(x) = \frac{x+2}{x^3e^x}$$

$$u'(x) = \frac{x}{x^3e^x} + \frac{2}{x^3e^x}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x^2e^x} + \frac{2}{x^3e^x}$$

$$\int u'(x) = \int \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{2e^{-x}}{x^3}\right)dx$$

$$u(x) = \int x^{-2}e^{-x}dx + \int 2x^{-3}e^{-x}\,dx$$

$$u(x) = x^{-2} \cdot -e^{-x} - \int -e^{-x} \cdot -2x^{-3}dx + \int 2x^{-3}e^{-x}\,dx + K_1$$

$$u(x) = -x^{-2}e^{-x} - \int 2x^{-3}e^{-x}dx + \int 2x^{-3}e^{-x}\,dx + K_1$$

$$u(x) = -x^{-2}e^{-x} + K_1$$

Integración por partes.

$u = x^{-2}$ $\qquad dv = e^{-x}dx$

$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(x^{-2})$ $\qquad \int dv = \int e^{-x}dx$

$\frac{du}{dx} = -2x^{-3}$ $\qquad v = -e^{-x}$

$du = -2x^{-3}dx$

Luego, la solución general de la ED es:

$$y = (-x^{-2}e^{-x} + K_1)x^3e^x$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = e - 1$.

$$e - 1 = (-(1)^{-2}e^{-1} + K_1)(1)^3e^1$$

$$e - 1 = \left(-\frac{1}{1^2e} + K_1\right)e$$

$$\frac{e-1}{e}=-\frac{1}{e}+K_1$$

$$\frac{e}{e}-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}+K_1$$

$$1-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=K_1$$

$$1=K_1 \qquad \rightarrow \quad K_1=1$$

$$y=(-x^{-2}e^{-x}+1)x^3e^x$$

$$y=-x^{-2}e^{-x}x^3e^x+x^3e^x$$

$$y=-x+x^3e^x$$

$$\boldsymbol{y=x^3e^x-x}$$

17. $x\frac{dy}{dx}+(x\cot x+1)y=\cot x\,;\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Solución:

$$x\frac{dy}{dx}+(x\cot x+1)y=\cot x$$

$$\frac{1}{x}\left[x\frac{dy}{dx}+(x\cot x+1)y\right]=\frac{1}{x}\cdot\cot x\,;\qquad x\neq 0$$

$$\frac{1}{x}\cdot x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}(x\cot x+1)y=\frac{\cot x}{x}$$

$\frac{dy}{dx}+\frac{x\cot x+1}{x}y=\frac{\cot x}{x}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx}+\frac{x\cot x+1}{x}y=0$, la ED homogénea asociado.

$$f(x)=\frac{x\cot x+1}{x}$$

$$y=Ke^{-\int f(x)dx}$$

$y = Ke^{-\int \frac{x\cot x+1}{x}dx}$

$y = Ke^{-\int \left(\frac{x\cot x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx}$

$y = Ke^{-\int \left(\cot x+\frac{1}{x}\right)dx}$

$y = Ke^{-\int \left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{x}\right)dx}$

$y = Ke^{-\left(\int \frac{\cos x}{\sin x}dx+\int \frac{1}{x}dx\right)}$

$y = Ke^{-(\ln\sin x+\ln x)}$

$y = Ke^{-\ln(x\sin x)}$

$y = Ke^{\ln(x\sin x)^{-1}}$

$y = K(x\sin x)^{-1}$

$y = Kx^{-1}(\sin x)^{-1}$

Supongamos que:

$y = u(x)x^{-1}(\sin x)^{-1}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + \frac{x\cot x+1}{x}y = \frac{\cot x}{x}$.

Calculamos la derivada de y.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}[u(x)x^{-1}(\sin x)^{-1}]$

$\frac{dy}{dx} = x^{-1}(\sin x)^{-1}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)(\sin x)^{-1}\frac{d}{dx}(x^{-1}) + u(x)x^{-1}\frac{d}{dx}[(\sin x)^{-1}]$

$\frac{dy}{dx} = x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) + u(x)(\sin x)^{-1}(-x^{-2}) + u(x)x^{-1}[-(\sin x)^{-2}]\frac{d}{dx}\sin x$

$\frac{dy}{dx} = x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) + u(x)(\sin x)^{-1}(-x^{-2}) + u(x)x^{-1}[-(\sin x)^{-2}]\cos x$

$\frac{dy}{dx} = x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) - u(x)x^{-2}(\sin x)^{-1} - u(x)x^{-1}(\sin x)^{-2}\cos x$

Sustituyendo, se obtiene:

$x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) - u(x)x^{-2}(\sin x)^{-1} - u(x)x^{-1}(\sin x)^{-2}\cos x + \frac{x\cot x+1}{x}u(x)x^{-1}(\sin x)^{-1} = \frac{\cot x}{x}$

$x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) - u(x)x^{-2}(\sin x)^{-1} - u(x)x^{-1}(\sin x)^{-2}\cos x + \left(\frac{x\cos x}{x\sin x} + \frac{1}{x}\right)u(x)x^{-1}(\sin x)^{-1} = \frac{\cot x}{x}$

$x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) - u(x)x^{-2}(\sin x)^{-1} - u(x)x^{-1}(\sin x)^{-2}\cos x + ((\sin x)^{-1}\cos x + x^{-1})u(x)x^{-1}(\sin x)^{-1} = \frac{\cot x}{x}$

$x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) - u(x)x^{-2}(\sin x)^{-1} - u(x)x^{-1}(\sin x)^{-2}\cos x + u(x)x^{-1}(\sin x)^{-2}\cos x + u(x)x^{-2}(\sin x)^{-1} = \frac{\cot x}{x}$

$x^{-1}(\sin x)^{-1}u'(x) = \frac{\cot x}{x}$

$u'(x) = \frac{\cot x}{xx^{-1}(\sin x)^{-1}}$

$u'(x) = \frac{x\sin x\cot x}{x}$

$u'(x) = \sin x\cot x$

$u'(x) = \sin x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$u'(x) = \cos x$

Integrando, se obtiene:

$u(x) = \sin x + K_1$

Luego, la solución general de la ED es:

$y = (\sin x + K_1)x^{-1}(\sin x)^{-1}$

$y = \frac{\sin x + K_1}{x\sin x}$

$yx\sin x = \sin x + K_1$

$yx\sin x - \sin x = K_1$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$.

$1 \cdot \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = K_1$

$\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 = K_1$

$\frac{\pi}{2} - 1 = K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$$yx\sin x - \sin x = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$(xy - 1)\sin x = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\boldsymbol{(xy - 1)\sin x + 1 - \frac{\pi}{2} = 0}$$

18. $ydx + \left(x + 2y\ln\frac{1}{y} - y\right)dy = 0$

Solución:

$$ydx + \left(x + 2y\ln\frac{1}{y} - y\right)dy = 0$$

$$ydx = -\left(x + 2y\ln\frac{1}{y} - y\right)dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\left(x + 2y\ln\frac{1}{y} - y\right)}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x - 2y\ln\frac{1}{y} + y}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} + \frac{y - 2y\ln\frac{1}{y}}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}x + \frac{y\left(1 - 2\ln\frac{1}{y}\right)}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}x + 1 - 2\ln\frac{1}{y}$$

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 1 - 2\ln\frac{1}{y}$, la ED es lineal en x.

Sea:

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(y) = \frac{1}{y}$

$x = Ke^{-\int f(y)dy}$

$x = Ke^{-\int \frac{1}{y}dy}$

$x = Ke^{-\ln y}$

$x = Ke^{\ln y^{-1}}$

$x = Ky^{-1}$

Supongamos que:

$x = u(y)y^{-1}$, es solución general de $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 1 - 2\ln\frac{1}{y}$.

Calculamos la derivada de x.

$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}[u(y)y^{-1}]$

$\frac{dx}{dy} = y^{-1}\frac{d}{dy}[u(y)] + u(y)\frac{d}{dy}(y^{-1})$

$\frac{dx}{dy} = y^{-1}u'(y) + u(y)(-y^{-2})$

$\frac{dx}{dy} = y^{-1}u'(y) - u(y)y^{-2}$

Sustituyendo, se obtiene:

$y^{-1}u'(y) - u(y)y^{-2} + \frac{1}{y}u(y)y^{-1} = 1 - 2\ln\frac{1}{y}$

$y^{-1}u'(y) - u(y)y^{-2} + u(y)y^{-1}y^{-1} = 1 - 2\ln\frac{1}{y}$

$y^{-1}u'(y) - u(y)y^{-2} + u(y)y^{-2} = 1 - 2\ln\frac{1}{y}$

$y^{-1}u'(y) = 1 - 2\ln\frac{1}{y}$

$$u'(y) = \frac{1 - 2\ln\frac{1}{y}}{y^{-1}}$$

$u'(y) = y\left(1 - 2\ln\frac{1}{y}\right)$

$u'(y) = y - 2y\ln\frac{1}{y}$

$\int u'(y) = \int \left(y - 2y\ln\frac{1}{y}\right)dy$

$u(y) = \int ydy - 2\int y\ln\frac{1}{y}dy$

$u(y) = \int ydy - 2\int y\ln y^{-1}\,dy$

$u(y) = \int ydy - 2\int -y\ln y\,dy$

$u(y) = \int ydy + 2\int y\ln y\,dy$

$u(y) = \int ydy + 2\left(\frac{y^2}{2}\ln y - \int\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{y}dy\right) + K_1$

$u(y) = \int ydy + 2\left(\frac{y^2}{2}\ln y - \int\frac{y}{2}dy\right) + K_1$

$u(y) = \int ydy + 2\cdot\frac{y^2}{2}\ln y - 2\cdot\frac{1}{2}\int y\,dy + K_1$

$u(y) = \int ydy + y^2\ln y - \int y\,dy + K_1$

$u(y) = y^2\ln y + K_1$

Integración por partes.

$u = \ln y$ $\quad dv = ydy$

$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}(\ln y)$ $\quad \int dv = \int ydy$

$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}$ $\quad v = \frac{y^2}{2}$

$du = \frac{1}{y}dy$

Luego, la solución general de la ED es:

$x = (y^2\ln y + K_1)y^{-1}$

$x = y^{-1}y^2\ln y + K_1y^{-1}$

$$x = \frac{y^2\ln y}{y} + \frac{K_1}{y}$$

$$\boldsymbol{x = y\ln y + \frac{K_1}{y}}$$

19. $y' + y \cot x = 2x \csc x$

Solución:

$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x \csc x$

$\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2x \csc x$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = \cot x$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int \cot x dx}$

$y = Ke^{-\int \frac{\cos x}{\sin x} dx}$

$y = Ke^{-\ln \sin x}$

$$y = \frac{K}{e^{\ln \sin x}}$$

$$y = \frac{K}{\sin x}$$

$y = K \csc x$

Supongamos que:

$y = u(x) \csc x$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2x \csc x$.

Calculamos la derivada de y.

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} [u(x) \csc x]$

$\frac{dy}{dx} = \csc x \frac{d}{dx} [u(x)] + u(x) \frac{d}{dx} (\csc x)$

$\frac{dy}{dx} = \csc x \, u'(x) + u(x)(-\csc x \cot x)$

$\frac{dy}{dx} = \csc x\, u'(x) - u(x) \csc x \cot x$

Sustituyendo, se obtiene:

$\csc x\, u'(x) - u(x) \csc x \cot x + (\cot x) u(x) \csc x = 2x \csc x$

$\csc x\, u'(x) - u(x) \csc x \cot x + u(x) \csc x \cot x = 2x \csc x$

$\csc x\, u'(x) = 2x \csc x$

$u'(x) = \dfrac{2x \csc x}{\csc x}$

$u'(x) = 2x$

Integrando, se obtiene:

$u(x) = x^2 + K_1$

Luego, la solución general de la ED es:

$\boldsymbol{y = (x^2 + K_1) \csc x}$

20. $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

Solución:

$\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$, la ED es lineal en y.

Sea:

$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = 3$

$y = Ke^{-\int f(x)dx}$

$y = Ke^{-\int 3dx}$

$y = Ke^{-3x}$

Supongamos que:

$y = u(x)e^{-3x}$, es solución general de $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$.

Calculamos la derivada de y.

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}[u(x)e^{-3x}]$

$\frac{dy}{dx} = e^{-3x}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}(e^{-3x})$

$\frac{dy}{dx} = e^{-3x}u'(x) + u(x)(-3e^{-3x})$

$\frac{dy}{dx} = e^{-3x}u'(x) - 3u(x)e^{-3x}$

Sustituyendo, se obtiene:

$e^{-3x}u'(x) - 3u(x)e^{-3x} + 3u(x)e^{-3x} = 3x^2e^{-3x}$

$e^{-3x}u'(x) = 3x^2e^{-3x}$

$u'(x) = \frac{3x^2e^{-3x}}{e^{-3x}}$

$u'(x) = 3x^2$

Integrando, se obtiene:

$u(x) = x^3 + K_1$

Luego, la solución general de la ED es:

$\boldsymbol{y = (x^3 + K_1)e^{-3x}}$

3.9 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

3.9.1 Soluciones de ED de Bernoulli

• Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Determine la solución particular donde se presente una condición inicial.

1. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3y^2$

Solución:

$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3y^2$, ED de Bernoulli en "y" con $n=2$.

Multiplicamos la ED por $\frac{1}{y^2}$.

$$\frac{1}{y^2}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3y^2\right]$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{x+1}=\frac{1}{y^2}\cdot-\frac{1}{2}(x+1)^3y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\boldsymbol{y^{-1}}}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3$$

Sea:

$$\boldsymbol{v=y^{-1}}$$

$$\frac{d}{dy}(v)=\frac{d}{dy}(y^{-1})$$

$$\frac{dv}{dy}=-y^{-2}$$

$$dv=-y^{-2}dy$$

$$\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx}=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3$$

$$-\left[-\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3\right]$$

$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x+1}v=\frac{1}{2}(x+1)^3$, la ED es lineal con variable dependiente v, variable independiente x.

$$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x+1}v-\frac{1}{2}(x+1)^3=0$$

$$dv+\left[-\frac{1}{x+1}v-\frac{1}{2}(x+1)^3\right]dx=0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{x+1}\left\{dv+\left[-\frac{1}{x+1}v-\frac{1}{2}(x+1)^3\right]dx=0\right\}$$

$$\frac{1}{x+1}dv+\frac{1}{x+1}\left[-\frac{1}{x+1}v-\frac{1}{2}(x+1)^3\right]dx=\frac{1}{x+1}\cdot 0,\quad x\neq -1$$

$$\frac{1}{x+1}dv+\left[-\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}v-\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{2}(x+1)^3\right]dx=0$$

$$\frac{1}{x+1}dv-\frac{1}{(x+1)^2}vdx-\frac{1}{2}(x+1)^2dx=0$$

$$\left[\frac{1}{x+1}dv-\frac{1}{(x+1)^2}vdx\right]-\frac{1}{2}(x+1)^2dx=0$$

$$d\left(\frac{v}{x+1}\right)+d\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(x+1)^3\right)=d(C)$$

$$d\left[\frac{v}{x+1}-\frac{1}{6}(x+1)^3\right]=d(C)$$

$$\int d\left[\frac{v}{x+1}-\frac{1}{6}(x+1)^3\right]=\int d(C)$$

$$\frac{v}{x+1}-\frac{1}{6}(x+1)^3=C$$

$$\frac{v}{x+1}=\frac{1}{6}(x+1)^3+C$$

$$v=(x+1)\left[\frac{1}{6}(x+1)^3+C\right]$$

Factor integrante.

$$f(x)=-\frac{1}{x+1}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int -\frac{1}{x+1}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\int\frac{1}{x+1}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\ln(x+1)}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln(x+1)^{-1}}$$

$$\boldsymbol{P}=(x+1)^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{x+1}$$

$v=\frac{1}{6}(x+1)^4+C(x+1)$, hacemos el cambio de variable $v=y^{-1}$.

$y^{-1}=\frac{1}{6}(x+1)^4+C(x+1)$

$\frac{1}{y}=\frac{(x+1)^4+6C(x+1)}{6}$

$6=y[(x+1)^4+6C(x+1)]$

$\frac{6}{(x+1)^4+6C(x+1)}=y$

Luego, la solución general de la ED es: $\boldsymbol{y}=\frac{\mathbf{6}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{4}}+\mathbf{6}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}$.

2. $xy^2y'+y^3=x\cos x$

Solución:

$xy^2y'+y^3=x\cos x$

$\frac{1}{xy^2}(xy^2y'+y^3=x\cos x)$

$\frac{1}{xy^2}xy^2y'+\frac{1}{xy^2}y^3=\frac{1}{xy^2}x\cos x\,, x\; e\; y\neq 0$

$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{y^2}\cos x$

$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=y^{-2}\cos x$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n=-2$.

Multiplicamos la ED por y^2.

$y^2\left(\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=y^{-2}\cos x\right)$

$y^2\frac{dy}{dx}+y^2\frac{1}{x}y=y^2y^{-2}\cos x$

$y^2\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^3=\cos x$

Sea:

$\boldsymbol{v = y^3}$

$\frac{d}{dy}(v) = \frac{d}{dy}(y^3)$

$\frac{dv}{dy} = 3y^2$

$dv = 3y^2 dy$

$$\frac{dv}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{dx} = y^2 \frac{dy}{dx}$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = \cos x$

$3\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = \cos x\right)$

$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x} v = 3\cos x$, la ED es lineal con variable dependiente v, variable independiente x.

Sea:

$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x} v = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(x) = \frac{3}{x}$

$v = Ke^{-\int f(x)dx}$

$v = Ke^{-\int \frac{3}{x} dx}$

$v = Ke^{-3\int \frac{1}{x} dx}$

$v = Ke^{-3\ln x}$

$v = Ke^{\ln x^{-3}}$

$v = Kx^{-3}$

Supongamos que:

$v = u(x)x^{-3}$ es solución general de $\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = 3\cos x$.

Calculemos la primera derivada de v.

$$\frac{d}{dx}v = \frac{d}{dx}[u(x)x^{-3}]$$

$$\frac{dv}{dx} = x^{-3}\frac{d}{dx}[u(x)] + u(x)\frac{d}{dx}(x^{-3})$$

$$\frac{dv}{dx} = x^{-3}u'(x) + u(x)(-3x^{-4})$$

$$\frac{dv}{dx} = x^{-3}u'(x) - 3u(x)x^{-4}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$x^{-3}u'(x) - 3u(x)x^{-4} + \frac{3}{x}u(x)x^{-3} = 3\cos x$$

$$x^{-3}u'(x) \cancel{- 3u(x)x^{-4}} \cancel{+ 3u(x)x^{-4}} = 3\cos x$$

$$x^{-3}u'(x) = 3\cos x$$

$$u'(x) = \frac{3\cos x}{x^{-3}}$$

$$u'(x) = 3x^3\cos x$$

$$\int u'(x) = \int 3x^3\cos x\,dx$$

$$u(x) = 3\int x^3\cos x\,dx$$

Resolvemos la integral por partes.

$$u(x) = 3(x^3\sin x - \int 3x^2\sin x\,dx) + C$$

$$u(x) = 3x^3\sin x - 9\int x^2\sin x\,dx + C$$

$u = x^3$	$dv = \cos x$
$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x^3$	$\int dv = \int \cos x\,dx$
$\frac{du}{dx} = 3x^2$	$v = \sin x$
$du = 3x^2dx$	

$u = x^2$ $\quad dv = \sin x$

$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x^2$ $\quad \int dv = \int \sin x\, dx$

$\frac{du}{dx} = 2x$ $\quad v = -\cos x$

$du = 2xdx$

Aplicando nuevamente integral por partes.

$u(x) = 3x^3 \sin x - 9(x^2 \cdot -\cos x - \int 2x \cdot -\cos x\, dx) + C_1,$

$u(x) = 3x^3 \sin x + 9x^2 \cos x - 18 \int x \cos x\, dx + C_1$

$u = x$ $\quad dv = \cos x$

$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x$ $\quad \int dv = \int \cos x\, dx$

$\frac{du}{dx} = 1$ $\quad v = \sin x$

$du = dx$

Aplicando nuevamente integral por partes.

$u(x) = 3x^3 \sin x + 9x^2 \cos x - 18(x \sin v - \int \sin x\, dx) + C_2$

$u(x) = 3x^3 \sin x + 9x^2 \cos x - 18(x \sin v -\cdot -\cos x) + C_2$

$u(x) = 3x^3 \sin x + 9x^2 \cos x - 18(x \sin v + \cos x) + C_2$

$u(x) = 3x^3 \sin x + 9x^2 \cos x - 18x \sin v - 18 \cos x + C_2$

Luego, la solución es:

$v = (3x^3 \sin x + 9x^2 \cos x - 18x \sin x - 18 \cos x + C_2)x^{-3}$

$v = \frac{3x^3 \sin x + 9x^2 \cos x - 18x \sin x - 18 \cos x + C_2}{x^3}$

$v = \frac{3x^3 \sin x}{x^3} + \frac{9x^2 \cos x}{x^3} - \frac{18x \sin x}{x^3} - \frac{18 \cos x}{x^3} + \frac{C_2}{x^3}$

$v = 3 \sin x + \frac{9 \cos x}{x} - \frac{18 \sin x}{x^2} - \frac{18 \cos x}{x^3} + \frac{C_2}{x^3}$, hacemos el cambio de variable $v = y^3$.

Luego, la solución general de la ED es: $\boldsymbol{y^3 = 3 \sin x + \frac{9 \cos x}{x} - \frac{18 \sin x}{x^2} - \frac{18 \cos x}{x^3} + \frac{C_2}{x^3}}$.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{4 \sin^2 y}{x^5 + x \tan y}$

Solución:

$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \sin^2 y}{x^5 + x \tan y}$, no es posible de escribir la ED de Bernoulli en "y".

¿Será ED de Bernoulli en x?

$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \sin^2 y}{x^5 + x \tan y}$

$(x^5 + x \tan y)dy = 4 \sin^2 y\, dx$

$\frac{x^5+x\tan y}{4\sin^2 y}=\frac{dx}{dy}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{x^5+x\tan y}{4\sin^2 y}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{x^5}{4\sin^2 y}+\frac{x\tan y}{4\sin^2 y}$

$\frac{dx}{dy}-\frac{\tan y}{4\sin^2 y}x=\frac{x^5}{4\sin^2 y}$, ED de Bernoulli en "$x$" con $n=5$.

Multiplicamos la ED por $\frac{1}{x^5}$.

$\frac{1}{x^5}\left[\frac{dx}{dy}-\frac{\tan y}{4\sin^2 y}x=\frac{x^5}{4\sin^2 y}\right]$

$\frac{1}{x^5}\cdot\frac{dx}{dy}-\frac{1}{x^5}\cdot\frac{\tan y}{4\sin^2 y}x=\frac{1}{x^5}\cdot\frac{x^5}{4\sin^2 y}, x^5\neq 0$

$\frac{1}{x^5}\cdot\frac{dx}{dy}-\frac{\tan y}{4\sin^2 y}xx^{-5}=\frac{1}{4\sin^2 y}$

$\frac{1}{x^5}\cdot\frac{dx}{dy}-\frac{\tan y}{4\sin^2 y}x^{-4}=\frac{1}{4\sin^2 y}$

Sea:

$\boldsymbol{v}=x^{-4}$

$\frac{d}{dx}(v)=\frac{d}{dx}(x^{-4})$

$\frac{dv}{dx}=-4x^{-5}$

$dv=-4x^{-5}dx$

$\frac{dv}{dy}=-4x^{-5}\frac{dx}{dy}$

$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dy}=x^{-5}\frac{dx}{dy}$

$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dy}=\frac{1}{x^5}\cdot\frac{dx}{dy}$

Sustituyendo, se obtiene:

$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dy}-\frac{\tan y}{4\sin^2 y}v=\frac{1}{4\sin^2 y}$

$-4\left(-\frac{1}{4}\frac{dv}{dy}-\frac{\tan y}{4\sin^2 y}v=\frac{1}{4\sin^2 y}\right)$

$\frac{dv}{dy}+\frac{\tan y}{\sin^2 y}v=-\frac{1}{\sin^2 y}$

$\frac{dv}{dy}+\frac{\tan y}{\sin^2 y}v=-\csc^2 y$, (*) la ED es lineal con variable dependiente v, variable independiente y.

Factor integrante.

$f(y)=\frac{\tan y}{\sin^2 y}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(y)dy}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int \frac{\tan y}{\sin^2 y}dy}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int \frac{\csc^2 y}{\cot y}dy}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int \frac{-du}{u}}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\int \frac{du}{u}}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\ln u}$

$\boldsymbol{P}=e^{\ln u^{-1}}$

$\boldsymbol{P}=u^{-1}$

$\boldsymbol{P}=\frac{1}{u}$

$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\cot y}$

$\boldsymbol{P}=\tan y$

Uso de identidades trigonométricas.

$\tan y=\frac{1}{\cot y}$ $\qquad \csc^2 y=\frac{1}{\sin^2 y}$

Cambio de variable.

$u=\cot y$

$\frac{d}{dy}u=\frac{d}{dy}\cot y$

$\frac{du}{dy}=-\csc^2 y$

$du=-\csc^2 y\,dy$

$-du=\csc^2 y\,dy$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$\tan y\left(\frac{dv}{dy}+\frac{\tan y}{\sin^2 y}v=-\csc^2 y\right)$

$\tan y\frac{dv}{dy}+\tan y\frac{\tan y}{\sin^2 y}v=-\tan y\csc^2 y$

$\tan y \frac{dv}{dy} + \tan y \frac{\tan y}{\sin^2 y} v + \tan y \csc^2 y = 0$

$\tan y \, dv + \left(\frac{\tan^2 y}{\sin^2 y} v + \frac{\csc^2 y}{\cot y}\right) dy = 0$

$\tan y \, dv + \left(\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} \cdot \frac{1}{\sin^2 y} v + \frac{\csc^2 y}{\cot y}\right) dy = 0$

$\tan y \, dv + \left(\frac{1}{\cos^2 y} v + \frac{\csc^2 y}{\cot y}\right) dy = 0$

$\tan y \, dv + \left(v \sec^2 y + \frac{\csc^2 y}{\cot y}\right) dy = 0$

$\tan y \, dv + v \sec^2 y \, dy + \frac{\csc^2 y}{\cot y} dy = 0$

$(\tan y \, dv + v \sec^2 y \, dy) + \frac{\csc^2 y}{\cot y} dy = 0$

$d(v \tan y) + d(-\ln(\cot y)) = d(C)$

$d(v \tan y - \ln(\cot y)) = d(C)$

$\int d(v \tan y - \ln(\cot y)) = \int d(C)$

$v \tan y - \ln(\cot y) = C$

$v \tan y + \ln(\cot y)^{-1} = C$

$v \tan y + \ln \frac{1}{\cot y} = C$

$v \tan y + \ln(\tan y) = C$

$v \tan y = C - \ln(\tan y)$, hacemos el cambio de variable $v = x^{-4}$.

$x^{-4} \tan y = C - \ln(\tan y)$

$\frac{\tan y}{x^4} = C - \ln(\tan y)$

$\tan y = x^4[C - \ln(\tan y)]$

Luego, la solución general de la ED es: $\boldsymbol{x^4[C - \ln(\tan y)] = \tan y}$.

4. $x^3 dy + 3x^2 dx = 2\cos y\, dy$

Solución:

$x^3 dy + 3x^2 dx = 2\cos y\, dy$

$x^3 dy - 2\cos y\, dy + 3x^2 dx = 0$

$(x^3 - 2\cos y)dy = -3x^2 dx$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{x^3 - 2\cos y}$, no es posible de escribir la ED de Bernoulli en "y".

¿Será ED de Bernoulli en x?

$x^3 dy + 3x^2 dx = 2\cos y\, dy$

$3x^2 dx + x^3 dy - 2\cos y\, dy = 0$

$3x^2 dx + (x^3 - 2\cos y)dy = 0$

$3x^2 dx = -(x^3 - 2\cos y)dy$

$\frac{dx}{dy} = \frac{-(x^3 - 2\cos y)}{3x^2}$

$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^3}{3x^2} + \frac{2\cos y}{3x^2}$

$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}(2\cos y)x^{-2}$

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(2\cos y)x^{-2}$, ED de Bernoulli en x con $n = -2$.

Multiplicamos la ED por x^2.

$x^2\left[\frac{dx}{dy} + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(2\cos y)x^{-2}\right]$

$x^2\frac{dx}{dy} + x^2\frac{1}{3}x = x^2\frac{1}{3}(2\cos y)x^{-2}$

$x^2\frac{dx}{dy} + \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(2\cos y)x^{-2}x^2$

$x^2\frac{dx}{dy} + \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(2\cos y)$

Sea:

$\boldsymbol{v = x^3}$

$\frac{d}{dx}(v) = \frac{d}{dx}(x^3)$

$\frac{dv}{dx} = 3x^2$

$dv = 3x^2 dx$

$\frac{dv}{dy} = 3x^2 \frac{dx}{dy}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{dy} = x^2 \frac{dx}{dy}$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{1}{3} v = \frac{1}{3}(2\cos y)$

$3\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{1}{3} v = \frac{1}{3}(2\cos y)\right]$

$\frac{dv}{dy} + v = 2\cos y$, (*) la ED es lineal con variable dependiente v, variable independiente y.

Sea:

$\frac{dv}{dy} + v = 0$, la ED homogénea asociado.

$f(y) = 1$

$v = Ke^{-\int f(y)dy}$

$v = Ke^{-\int 1dy}$

$v = Ke^{-y}$

Supongamos que:

$v = u(y)e^{-y}$ es solución general de $\frac{dv}{dy} + v = 2\cos y$.

Calculamos la primera derivada de v.

$\frac{d}{dy}v = \frac{d}{dy}[u(y)e^{-y}]$

$\frac{dv}{dy} = e^{-y}\frac{d}{dy}[u(y)] + u(y)\frac{d}{dy}(e^{-y})$

$\frac{dv}{dy} = e^{-y}u'(y) + u(y)(-e^{-y})$

$\frac{dv}{dy} = e^{-y}u'(y) - u(y)e^{-y}$

Sustituyendo, se obtiene:

$e^{-y}u'(y) - \cancel{u(y)e^{-y}} + \cancel{u(y)e^{-y}} = 2\cos y$

$e^{-y}u'(y) = 2\cos y$

$u'(y) = \frac{2\cos y}{e^{-y}}$

$u'(y) = 2e^{y}\cos y$

$\int u'(y) = \int 2e^{y}\cos y dy$

$\int u'(y) = 2\int e^{y}\cos y dy$

$u(y) = 2\int e^{y}\cos y dy$

Calculemos la integral por partes.

$t = e^{y}$ $\qquad dv = \cos y dy$

$\frac{d}{dy}t = \frac{d}{dy}e^{y}$ $\qquad \int dv = \int \cos y dy$

$\frac{dt}{dy} = e^{y}$ $\qquad v = \sin y$

$dt = e^{y}dy$

$u(y) = 2(e^{y}\sin y - \int e^{y}\sin y\, dy) + K_1$

Aplicando la integración por partes nuevamente.

$t = e^y$ $dv = \sin y\, dy$

$\frac{d}{dy} t = \frac{d}{dy} e^y$ $\int dv = \int \sin y\, dy$

$\frac{dt}{dy} = e^y$ $v = -\cos y$

$dt = e^y dy$

$u(y) = 2[e^y \sin y - (-e^y \cos y - \int (-e^y \cos y) dy)] + K_1$

$u(y) = 2[e^y \sin y - (-e^y \cos y + \int e^y \cos y\, dy)] + K_1$

$u(y) = 2[e^y \sin y + e^y \cos y - \int e^y \cos y\, dy] + K_1$

$u(y) = 2e^y \sin y + 2e^y \cos y - 2\int e^y \cos y\, dy + K_1$

Se observa que se repite la integral $2\int e^y \cos y\, dy$. Sabemos que $u(y) = 2\int e^y \cos y dy$.

Reemplazando, tenemos:

$u(y) = 2e^y \sin y + 2e^y \cos y - u(y) + K_1$

$u(y) + u(y) = 2e^y \sin y + 2e^y \cos y + K_1$

$2u(y) = 2e^y \sin y + 2e^y \cos y + K_1$

$u(y) = \frac{2e^y \sin y + 2e^y \cos y + K_1}{2}$

$u(y) = \frac{2e^y \sin y}{2} + \frac{2e^y \cos y}{2} + \frac{K_1}{2}$

$u(y) = e^y \sin y + e^y \cos y + K_2$, donde $K_2 = \frac{K_1}{2}$.

Luego, la solución de la ED (*) es:

$v = (e^y \sin y + e^y \cos y + K_2)e^{-y}$ (**)

Sustituyendo $v = x^3$en la ecuación (**).

$x^3 = (e^y \sin y + e^y \cos y + K_2)e^{-y}$

$x^3 = e^{-y}e^y \sin y + e^{-y}e^y \cos y + K_{2e^{-y}}$

$x^3 = \sin y + \cos y + K_2 e^{-y}$

Luego, la solución general de la ED es:$\boldsymbol{x^3 = \sin y + \cos y + K_2 e^{-y}}$.

5. $y' + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} y = \frac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$

Solución:

$$y' + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} y = \frac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} y = \frac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = 2$.

Multiplicamos la ED por $\frac{1}{y^2}$.

$$\frac{1}{y^2}\left[\frac{dy}{dx} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} y = \frac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} y = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}, y^2 \neq 0$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} y y^{-2} = \frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} y^{-1} = \frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Sea:

$$\boldsymbol{v = y^{-1}}$$

$$\frac{d}{dy}(v) = \frac{d}{dy}(y^{-1})$$

$$\frac{dv}{dy} = -y^{-2}$$

$$dv = -y^{-2} dy$$

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} v = \frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\left[-\frac{dv}{dx} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} v = \frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} v = -\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} \; (*)$$

Factor integrante.

$$f(x) = -\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx}$$

Haciendo cambio de variable $u = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

$$\frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = 2\left(x+\frac{1}{2}\right) + 0$$

$$\frac{du}{dx} = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Completando cuadrado de $(x^2 + x + 1)$.

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left[x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \frac{1}{4} + 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$\frac{du}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right) dx$

Luego, tenemos:

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{\frac{du}{2}}{u}}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\ln u}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln u^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{dv}{dx} - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}v = -\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}v = \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\left[-\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}v = \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\left[-\frac{(1-x^2)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{x+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}v = -\frac{(1-x^2)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{4}{2}}}$$

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{x+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}v = -\frac{(1-x^2)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{2}}$$

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{x+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}v+\frac{\left(1-x^2\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}=0$$

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}dv+\left\{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}v+\frac{\left(1-x^2\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\right\}dx=0$$

$$\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}dv-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}vdx+\frac{\left(1-x^2\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx=0$$

$$d\left\{\frac{v}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}+\frac{1-x^2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx=0$$

$$d\left\{\frac{v}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}=-\frac{1-x^2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx$$

$$d\left\{\frac{v}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{x^2-1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx$$

$$\int d\left\{\frac{v}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}=\int\frac{x^2-1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx$$

$$\frac{v}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{x^2-1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx$$

Sea:

$$I=\int\frac{x^2-1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx$$

$$\frac{v}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}=I$$

Calculamos la integral I.

$$I = \int \frac{x^2-1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2} dx$$

$$I = \int \frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left[u^2+\frac{3}{4}\right]^2} du$$

$$I = \int \frac{u^2-u+\frac{1}{4}-1}{\left[u^2+\frac{3}{4}\right]^2} du$$

$$I = \int \frac{u^2-u-\frac{3}{4}}{\left[u^2+\frac{3}{4}\right]^2} du$$

Cambio de variable.

$$u = x + \frac{1}{2}\,, \quad x = u - \frac{1}{2}$$

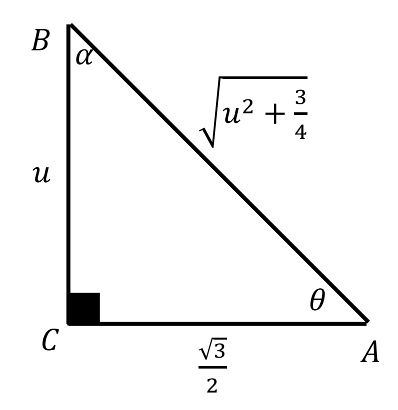
$$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + 0$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \rightarrow \; du = dx$$

Resolvemos la integral por sustitución trigonométrica.



$$\tan\theta = \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta = u$$

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \quad \rightarrow \quad u^2 = \frac{3}{4}\tan^2\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}u = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d}{d\theta}\tan\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta$$

$$du = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{4}\tan^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{3}{4}}{\left[\frac{3}{4}\tan^2\theta + \frac{3}{4}\right]^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{4}\tan^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 [\tan^2\theta + 1]^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{4}\tan^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}[\sec^2\theta]^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{4}\tan^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}\sec^4\theta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}\tan^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}\sec^2\theta}\, d\theta$$

$$I = \int \left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}\tan^2\theta}{\frac{9}{16}\sec^2\theta} - \frac{\frac{3}{4}\tan\theta}{\frac{9}{16}\sec^2\theta} - \frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{\frac{9}{16}\sec^2\theta} \right) d\theta$$

$$I = \int \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\cos\theta} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{16}{9}\cos^2\theta \right) d\theta$$

$$I = \int \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta - \frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^2\theta \right) d\theta$$

$$I = \int \left(-\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^2\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta \right) d\theta$$

$$I = \int \left(-\frac{2}{3}2\sin\theta\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \right) d\theta$$

$$I = \int \left(-\frac{2}{3}\sin 2\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos 2\theta \right) d\theta$$

$$I = -\int \frac{2}{3}\sin 2\theta \, d\theta - \int \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos 2\theta \, d\theta$$

$$I = \frac{1}{3}\int (-2\sin 2\theta \, d\theta) - \frac{\sqrt{3}}{3}\int 2\cos 2\theta \, d\theta$$

$$I = \frac{1}{3}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta + C$$

$$I = \frac{1}{3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\theta\cos\theta + C$$

$$I = \frac{1}{3}[\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)] - \frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\theta\cos\theta + C$$

$$I = \frac{1}{3}[\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta] - \frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\theta\cos\theta + C$$

$$I = \frac{1}{3}[2\cos^2\theta - 1] - \frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\theta\cos\theta + C$$

$$I = \frac{2}{3}\cos^2\theta - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\theta\cos\theta + C$$

$$I = \frac{2}{3}\cos^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\theta\cos\theta + C - \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{2}{3}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\right)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\right)\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\right) + C_2, donde\ C_2 = C - \frac{1}{3}.$$

$$I = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + C_2$$

$$I = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + C_2$$

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + C_2$$

$$I = \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2} - u\right) + C_2$$

Reemplazando $u = x + \frac{1}{2}$ en la I.

$$I = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\left[\frac{1}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + C_2$$

$$I = \frac{1}{x^2 + x + 1}\left[\frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}\right] + C_2$$

$$I = \frac{1}{x^2 + x + 1}(-x) + C_2$$

$$I = -\frac{x}{x^2 + x + 1} + C_2$$

Luego, la solución de $\frac{v}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}} = I$ es:

$$\frac{v}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{x^2 + x + 1} + C_2$$

$$\frac{v}{[x^2 + x + 1]^{\frac{1}{2}}} = C_2 - \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

$$v = [x^2 + x + 1]^{\frac{1}{2}}\left[C_2 - \frac{x}{x^2+x+1}\right]$$

$$v = C_2[x^2 + x + 1]^{\frac{1}{2}} - [x^2 + x + 1]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

$$v = C_2[x^2 + x + 1]^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{[x^2 + x + 1]^{-\frac{1}{2}}(x^2 + x + 1)}$$

$$v = C_2[x^2 + x + 1]^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{[x^2 + x + 1]^{\frac{1}{2}}}$$

$$v = C_2\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \text{ (**)}$$

Sustituyendo $v = y^{-1}$ en la ecuación (**).

$$y^{-1} = C_2\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es: $\boldsymbol{\frac{1}{y} = C_2\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}}$.

6. $(1 - x^2)y' + xy = x(1 - x^2)\sqrt{y}$; $y(0) = 1$

Solución:

$$(1 - x^2)y' + xy = x(1 - x^2)\sqrt{y}$$

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = x(1 - x^2)\sqrt{y}$$

$$\frac{1}{1-x^2}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = x(1 - x^2)\sqrt{y}\right]$$

$$\frac{1}{1-x^2} \cdot (1 - x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1-x^2} \cdot xy = \frac{1}{1-x^2} \cdot x(1 - x^2)\sqrt{y}, \qquad x \neq \{-1,1\}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = xy^{\frac{1}{2}}$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = \frac{1}{2}$.

Multiplicamos la ED por $\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$.

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = xy^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot xy^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}yy^{-\frac{1}{2}} = x$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y^{\frac{1}{2}} = x$$

Sea:

$\boldsymbol{v = y^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{d}{dy}(v) = \frac{d}{dy}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$

$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$

$2dv = y^{-\frac{1}{2}}dy$

$2dv = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}dy$

$2\frac{dv}{dx} = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dy}{dx}$

Sustituyendo, se obtiene:

$2\frac{dv}{dx} + \frac{x}{1-x^2}v = x$

$\frac{1}{2}\left(2\frac{dv}{dx} + \frac{x}{1-x^2}v = x\right)$

$\frac{1}{2}2\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2}\frac{x}{1-x^2}v = \frac{1}{2}x$

$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}v = \frac{1}{2}x$, la ED es lineal en con variable depediente v, variable independiente x.

$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}v - \frac{1}{2}x = 0$

$dv + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}v - \frac{1}{2}x\right)dx = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\left[dv + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}v - \frac{1}{2}x\right)dx = 0\right]$

$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dv + (1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}v - \frac{1}{2}x\right)dx = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot 0$

$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dv + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}v(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}x(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\right)dx = 0$

Factor integrante.

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{x}{1-x^2}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{-2(1-x^2)}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{4}\int \frac{-2x}{1-x^2}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{4}\ln(1-x^2)}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}}$

$\boldsymbol{P} = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dv+\left(\frac{1}{2}xv(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}(1-x^2)^{-1}-\frac{1}{2}x(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\right)dx=0$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dv+\left(\frac{1}{2}xv(1-x^2)^{-\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}x(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\right)dx=0$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dv+\frac{1}{2}xv(1-x^2)^{-\frac{5}{4}}dx-\frac{1}{2}x(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dx=0$$

$$\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dv+\frac{1}{2}xv(1-x^2)^{-\frac{5}{4}}dx\right]-\frac{1}{2}x(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dx=0$$

$$d\left[v(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\right]+d\left[\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\right]=d(C)$$

$$d\left[v(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\right]=d(C)$$

$$\int d\left[v(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\right]=\int d(C)$$

$$v(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}=C$$

$$\frac{v}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}=C \text{ (**)}$$

Reemplazando $v=y^{\frac{1}{2}}$ en la ecuación (**).

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}=C$$

Calculemos la solución particular de la ED para $x=0, y=1$.

$$\frac{1^{\frac{1}{2}}}{(1-0^2)^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{3}(1-0^2)^{\frac{3}{4}}=C$$

$$\frac{1}{(1)^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{4}}=C$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\cdot 1=C$$

$$1+\frac{1}{3}=C$$

$$\frac{4}{3}=C$$

$C = \frac{4}{3}$

Luego, tenemos:

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\right]$$

$$y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}(1-x^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1-x^2) = \frac{4}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$3\left[y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1-x^2)\right] = 4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$3y^{\frac{1}{2}} + 1 - x^2 = 4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

Por lo tanto, la solución particular de la ED es:$\boldsymbol{3y^{\frac{1}{2}} + 1 - x^2 = 4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$.

7. $(x+1)dy = y[y(x+1)\ln(x+1) - 1]dx$; $y(0) = 2$

Solución:

$$(x+1)dy = y[y(x+1)\ln(x+1) - 1]dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y[y(x+1)\ln(x+1)-1]}{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(x+1)\ln(x+1)-y}{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(x+1)\ln(x+1)}{x+1} - \frac{y}{x+1}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = y^2\ln(x+1)$, ED de Bernoulli en y con $n = 2$.

Multiplicamos la ED por $\frac{1}{y^2}$.

$\frac{1}{y^2}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}y=y^2\ln(x+1)\right]$

$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{x+1}y=\frac{1}{y^2}\cdot y^2\ln(x+1)\,,y^2\neq 0$

$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}yy^{-2}=\ln(x+1)$

$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}y^{-1}=\ln(x+1)$

Sea:

$\boldsymbol{v=y^{-1}}$

$\frac{d}{dy}(v)=\frac{d}{dy}(y^{-1})$

$\frac{dv}{dy}=-1y^{-2}$

$dv=-y^{-2}dy$

$\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$

$-\frac{dv}{dx}=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}$

Sustituyendo, se obtiene:

$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x+1}v=\ln(x+1)$

$-\left[-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x+1}v=\ln(x+1)\right]$

$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x+1}v=-\ln(x+1)$, (*) la ED es lineal con variable dependiente v, variable independiente x.

$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x+1}v+\ln(x+1)=0$

$dv+\left[-\frac{1}{x+1}v+\ln(x+1)\right]dx=0$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

Factor integrante.

$\frac{1}{x+1}\left\{dv + \left[-\frac{1}{x+1}v + \ln(x+1)\right]dx = 0\right\}$

$f(x) = -\frac{1}{x+1}$

$\frac{1}{x+1}dv + \frac{1}{x+1}\left[-\frac{1}{x+1}v + \ln(x+1)\right]dx = \frac{1}{x+1}\cdot 0, x \neq -1$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\frac{1}{x+1}dv + \left[-\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}v + \frac{1}{x+1}\cdot\ln(x+1)\right]dx = 0$

$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{1}{x+1}dx}$

$\frac{1}{x+1}dv + \left[-\frac{1}{(x+1)^2}v + \frac{1}{x+1}\cdot\ln(x+1)\right]dx = 0$

$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{1}{x+1}dx}$

$\frac{1}{x+1}dv - \frac{1}{(x+1)^2}vdx + \frac{1}{x+1}\cdot\ln(x+1)\,dx = 0$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln(x+1)}$

$\left[\frac{1}{x+1}dv - \frac{1}{(x+1)^2}vdx\right] + \frac{1}{x+1}\cdot\ln(x+1)\,dx = 0$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(x+1)^{-1}}$

$\boldsymbol{P} = (x+1)^{-1}$

$d\left(\frac{v}{x+1}\right) + d\left(\frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2\right) = d(C)$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x+1}$

$d\left[\frac{v}{x+1} + \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2\right] = d(C)$

$\int d\left[\frac{v}{x+1} + \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2\right] = \int d(C)$

Entonces, la solución de la ED (*) es:

$\frac{v}{x+1} + \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2 = C$ (**)

Reemplazando $v = y^{-1}$ en la ecuación (**).

$\frac{y^{-1}}{x+1} + \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2 = C$, solución general de la ED.

$\frac{1}{y(x+1)} + \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2 = C$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 0, y = 2$.

$\frac{1}{2(0+1)} + \frac{1}{2}[\ln(0+1)]^2 = C$

$\frac{1}{2(1)} + \frac{1}{2}[\ln(1)]^2 = C$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}[0]^2 = C$

$$\frac{1}{2} + 0 = C$$

$\frac{1}{2} = C$

$C = \frac{1}{2}$

$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\mathbf{ln}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})]^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, solución particular de la ED.

8. $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$

Solución:

$(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$

$$y' = \frac{xy + x^2y^2}{1 + x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1 + x^2} + \frac{x^2y^2}{1 + x^2}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2}y^2$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = 2$.

Multiplicamos la ED por $\frac{1}{y^2}$.

$$\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 + x^2}y = \frac{x^2}{1 + x^2}y^2\right)$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{x}{1 + x^2}y = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{x^2}{1 + x^2}y^2$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{x}{y(1 + x^2)} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 + x^2}y^{-1} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Sea:

$v = y^{-1}$

$$\frac{d}{dy}(v) = \frac{d}{dy}(y^{-1})$$

$$\frac{dv}{dy} = -y^{-2}$$

$$dv = -y^{-2}dy$$

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} = \frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{x}{1+x^2}v = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$-\left(-\frac{dv}{dx} - \frac{x}{1+x^2}v = \frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$\frac{dv}{dx} + \frac{x}{1+x^2}v = -\frac{x^2}{1+x^2}$, la ED es lineal con variable dependiente v, variable independiente x.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{x}{1+x^2}v + \frac{x^2}{1+x^2} = 0$$

$dv + \left(\frac{x}{1+x^2}v + \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[dv + \left(\frac{x}{1+x^2}v + \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx = 0\right]$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dv + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1+x^2}v + \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 0$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dv + \left((1+x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{x}{1+x^2}v + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx = 0$$

Factor integrante.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dv + \left[\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}v + \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]dx = 0$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dv + \frac{xv}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx + \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx = 0$$

$$\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dv + \frac{xv}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx\right] + \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx = 0$$

$$d\left[v(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$\int d\left[v(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \int\left(-\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

$$v(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = -\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

Sea: $I = -\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$

$$v(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = I$$

Calculamos la integral I.

$$I = -\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$I = -\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

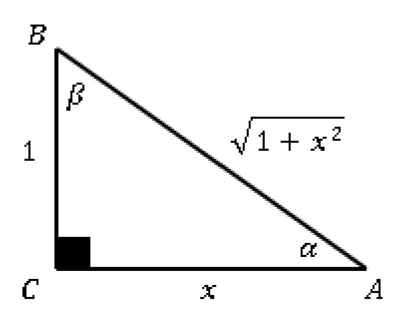
$$I = -\int \frac{\cot^2\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \cdot -\csc^2\alpha\, d\alpha$$

$$I = \int \frac{\cot^2\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha}} \cdot \csc^2\alpha\, d\alpha$$

$$I = \int \frac{\cot^2\alpha}{\csc\alpha} \cdot \csc^2\alpha\, d\alpha$$

$$I = \int \cot^2\alpha \csc\alpha\, d\alpha$$

Sustitución trigonométrica.



$$\cot\alpha = \frac{x}{1}$$

$$\cot\alpha = x$$

$$x = \cot\alpha \quad \rightarrow \quad x^2 = \cot^2\alpha$$

$$\frac{d}{d\alpha}x = \frac{d}{d\alpha}\cot\alpha$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\csc^2\alpha$$

$I = \int (\csc^2 \alpha - 1) \csc \alpha \, d\alpha$

$I = \int (\csc^2 \alpha \csc \alpha - \csc \alpha) \, d\alpha$

$I = \int \csc^2 \alpha \csc \alpha \, d\alpha - \int \csc \alpha \, d\alpha$

$I = \int \csc^2 \alpha \csc \alpha \, d\alpha - \ln(\csc \alpha - \cot \alpha) + C$

Aplicamos integral por partes a $\int \csc^2 \alpha \csc \alpha \, d\alpha$.

$u = \csc \alpha$ $\qquad$ $dv = \csc^2 \alpha \, d\alpha$

$\frac{d}{d\alpha} u = \frac{d}{d\alpha} \csc \alpha$ $\qquad$ $\int dv = \int \csc^2 \alpha \, d\alpha$

$\frac{du}{d\alpha} = -\csc \alpha \cot \alpha$ $\qquad$ $v = -\cot \alpha$

$du = -\csc \alpha \cot \alpha \, d\alpha$

$I = \csc \alpha \cdot -\cot \alpha - \big((\int -\cot \alpha \cdot -\csc \alpha \cot \alpha)\big) d\alpha - \ln(\csc \alpha - \cot \alpha) + C$

$I = -\csc \alpha \cot \alpha - \int \cot^2 \alpha \csc \alpha \, d\alpha - \ln(\csc \alpha - \cot \alpha) + C$

Se repite nuevamente la integral $\int \cot^2 \alpha \csc \alpha \, d\alpha$. Además, $I = \int \cot^2 \alpha \csc \alpha \, d\alpha$.

$I = -\csc \alpha \cot \alpha - I - \ln(\csc \alpha - \cot \alpha) + C$

$I + I = -\csc \alpha \cot \alpha - \ln(\csc \alpha - \cot \alpha) + C$

$2I = -\csc \alpha \cot \alpha - \ln(\csc \alpha - \cot \alpha) + C$

$$I = \frac{1}{2}[-\csc \alpha \cot \alpha - \ln(\csc \alpha - \cot \alpha) + C]$$

Escribiendo con la variable original.

$I = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{1 + x^2} \cdot x - \ln\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) + C\right]$

$I = \frac{1}{2}\left[-x\sqrt{1 + x^2} - \ln\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) + C\right]$

$I = \frac{1}{2}\left[C - x\sqrt{1 + x^2} - \ln\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)\right]$

Luego, la solución de $v(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = I$ es:

$v(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[C - x\sqrt{1+x^2} - \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right]$, sustituyendo $v = y^{-1}$.

$y^{-1} = \frac{1}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\left[C - x\sqrt{1+x^2} - \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right]$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$\boldsymbol{\frac{1}{y} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left[C - x\sqrt{1+x^2} - \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right]}$$

9. $(x^2+1)\sqrt{y}y' = xe^{\frac{3x}{2}} + (1-x)^2\sqrt{y^3}$

Solución:

$$(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = xe^{\frac{3x}{2}} + (1-x)^2 y^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}}\left[(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\right] = \frac{1}{(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}}\left[xe^{\frac{3x}{2}} + (1-x)^2 y^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\frac{1}{(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}}(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1-x)^2 y^{\frac{3}{2}}}{(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)y^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1-x)^2 y}{(x^2+1)}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}y = \frac{xe^{\frac{3x}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)}$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = -\frac{1}{2}$.

Multiplicamos la ED por $y^{\frac{1}{2}}$.

$$y^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dy}{dx} - \frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}y\right] = y^{\frac{1}{2}}\left[\frac{xe^{\frac{3x}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)}\right]$$

$$y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} - \frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}yy^{\frac{1}{2}} = \frac{xe^{\frac{3x}{2}}y^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)}$$

$$y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}-\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}y^{\frac{3}{2}}=\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}$$

Sea:

$$\boldsymbol{v=y^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{d}{dy}y^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{3}dv=y^{\frac{1}{2}}dy$$

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{dx}=y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{dx}-\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}v=\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}$$

$$\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\frac{dv}{dx}-\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}v\right]=\frac{3}{2}\left[\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}\right]$$

$\frac{dv}{dx}-\frac{3}{2}\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}v=\frac{3}{2}\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}-\frac{3}{2}\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}v-\frac{3}{2}\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}=0$$

$$dv+\left[-\frac{3}{2}\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}v-\frac{3}{2}\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}\right]dx=0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

Factor integrante.

$$f(x)=-\frac{3}{2}\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left[-\frac{3(1-x)^2}{2(x^2+1)}\right]dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\int\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\int\frac{1-2x+x^2}{(x^2+1)}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\int\frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\int\frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\int\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\left[\int dx-\int\frac{2x}{x^2+1}dx\right]}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}\left[x-\ln(x^2+1)\right]}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\ln(x^2+1)}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}x+\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}x}e^{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\left\{dv+\left[-\frac{3}{2}\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}v-\frac{3}{2}\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}\right]dx\right\}=0\cdot e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dv+e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{3}{2}\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}v-\frac{3}{2}\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}\right]dx=0$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dv-\frac{3}{2}\frac{(1-x)^2}{(x^2+1)}ve^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx-\frac{3}{2}\frac{xe^{\frac{3x}{2}}}{(x^2+1)}e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx=0$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dv-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(1-x)^2vdx-\frac{3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2}dx=0$$

$$\left[e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dv-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(1-x)^2vdx\right]-\frac{3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2}dx=0$$

$$d\left[ve^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]-d\left[\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]=d(C)$$

$$d\left[ve^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]=d(C)$$

$$\int d\left[ve^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]=\int d(C)$$

$$ve^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}=C$$

Entonces, la solución de la ED (*) es:

$$ve^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}=C \quad (**)$$

Reemplazando $v=y^{\frac{3}{2}}$ en la ecuación (**).

$$y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}=C$$

$$y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}x} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}x} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{C}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2} + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^{-\frac{3}{2}x}}\left[\frac{1}{2} + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$y^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}x}\left[\frac{1}{2} + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left\{e^{\frac{3}{2}x}\left[\frac{1}{2} + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\right]\right\}^{\frac{2}{3}}$$

$\boldsymbol{y = e^{x}\left[\frac{1}{2} + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}}$, solución general de la ED.

10. $y - y'\cos x = y^2\cos x\,(1-\sin x)$

Solución:

$$y - \frac{dy}{dx}\cos x = y^2\cos x\,(1-\sin x)$$

$$-\frac{dy}{dx}\cos x + y = y^2\cos x\,(1-\sin x)$$

$$\frac{1}{\cos x}\left(-\frac{dy}{dx}\cos x + y\right) = \frac{1}{\cos x}[y^2\cos x\,(1-\sin x)]$$

$$\frac{1}{\cos x}\cdot -\frac{dy}{dx}\cos x + y\cdot\frac{1}{\cos x} = y^2(1-\sin x)$$

$-\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos x}y = y^2\cos x\,(1-\sin x)$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = 2$.

Multiplicamos la ED por y^{-2}.

$$y^{-2}\left(-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\cos x}y\right)=y^{-2}y^{2}(1-\sin x)$$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}+(\sec x)yy^{-2}=1-\sin x$$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}+(\sec x)y^{-1}=1-\sin x$$

Sea:

$$\boldsymbol{v=y^{-1}}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{d}{dy}y^{-1}$$

$$\frac{dv}{dy}=-y^{-2}$$

$$dv=-y^{-2}dy$$

$$\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{dv}{dx}+(\sec x)v=1-\sin x$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}+v\sec x-(1-\sin x)=0$$

$$dv+[v\sec x-(1-\sin x)]dx=0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(\sec x+\tan x)\{dv+[v\sec x-(1-\sin x)]dx\}=0(\sec x+\tan x)$$

$$(\sec x+\tan x)dv+(\sec x+\tan x)[v\sec x-(1-\sin x)]dx=0$$

$$(\sec x+\tan x)dv+v(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx-(1-\sin x)(\sec x+\tan x)dx=0$$

Factor integrante.

$$f(x)=\sec x$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int \sec x dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln(\sec x+\tan x)}$$

$$\boldsymbol{P}=\sec x+\tan x$$

$$(\sec x + \tan x)dv + v(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx - (1 - \sin x)\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)dx = 0$$

$$(\sec x + \tan x)dv + v(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx - (1 - \sin x)\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)dx = 0$$

$$(\sec x + \tan x)dv + v(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx - \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}dx = 0$$

$$(\sec x + \tan x)dv + v(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx - \frac{\cos^2 x}{\cos x}dx = 0$$

$$(\sec x + \tan x)dv + v(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx - \cos x\, dx = 0$$

$$d[v(\sec x + \tan x)] - d(\sin x) = d(C)$$

$$d[v(\sec x + \tan x) - \sin x] = d(C)$$

$$\int d[v(\sec x + \tan x) - \sin x] = \int d(C)$$

$$v(\sec x + \tan x) - \sin x = C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$v(\sec x + \tan x) - \sin x = C \qquad (**)$$

Sustituyendo $v = y^{-1}$ en la ecuación (**).

$$y^{-1}(\sec x + \tan x) - \sin x = C$$

$$y^{-1}(\sec x + \tan x) = C + \sin x$$

$$\frac{\sec x + \tan x}{y} = C + \sin x$$

$$\sec x + \tan x = y(C + \sin x)$$

$$y(C + \sin x) = \sec x + \tan x$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$\boldsymbol{y = \frac{\sec x + \tan x}{C + \sin x}}$$

11. $(2x^2 \sin y - 2x\cos^2 y)dy = \sin 2y\, dx$

Solución:

$(2x^2 \sin y - 2x\cos^2 y)dy = \sin 2y\, dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2y}{2x^2 \sin y - 2x\cos^2 y}$, no es posible transformar en ED de Bernoulli en "y".

¿Será ED de Bernoulli en x?

$(2x^2 \sin y - 2x\cos^2 y)dy = \sin 2y\, dx$

$$\frac{2x^2 \sin y - 2x\cos^2 y}{\sin 2y} = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^2 \sin y - 2x\cos^2 y}{\sin 2y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^2 \sin y}{\sin 2y} - \frac{2x\cos^2 y}{\sin 2y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^2 \sin y}{2\sin y \cos y} - \frac{2x\cos^2 y}{2\sin y \cos y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{\cos y} - \frac{x\cos y}{\sin y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x\cos y}{\sin y} = \frac{x^2}{\cos y}$$

$\frac{dx}{dy} + \frac{\cos y}{\sin y}x = \frac{x^2}{\cos y}$, ED de Bernoulli en x con $n = 2$.

Multiplicamos la ED por x^{-2}.

$$x^{-2}\left(\frac{dx}{dy} + \frac{\cos y}{\sin y}x\right) = x^{-2}\frac{x^2}{\cos y}$$

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} + \frac{\cos y}{\sin y}xx^{-2} = \frac{1}{\cos y}$$

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} + \frac{\cos y}{\sin y}x^{-1} = \sec y$$

Sea:

$\boldsymbol{v = x^{-1}}$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}x^{-1}$$

$$\frac{dv}{dx} = -x^{-2}$$

$$-(dv = -x^{-2}dx)$$

$$-dv = x^{-2}dx$$

$$-\frac{dv}{dy} = x^{-2}\frac{dx}{dy}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{dv}{dy} + \frac{\cos y}{\sin y}v = \sec y$$

$$-\left(-\frac{dv}{dy} + \frac{\cos y}{\sin y}v = \sec y\right)$$

$\frac{dv}{dy} - \frac{\cos y}{\sin y}v = -\sec y$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dy} - \frac{\cos y}{\sin y}v + \sec y = 0$$

$$dv + \left(-\frac{\cos y}{\sin y}v + \sec y\right)dy = 0 \ \ (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{\sin y}\left[dv + \left(-\frac{\cos y}{\sin y}v + \sec y\right)dy\right] = 0 \cdot \frac{1}{\sin y}$$

$$\frac{1}{\sin y}dv + \frac{1}{\sin y}\left(-\frac{\cos y}{\sin y}v + \sec y\right)dy = 0$$

$$\frac{1}{\sin y}dv - \frac{\cos y}{\sin^2 y}vdy + \frac{\sec y}{\sin y}dy = 0$$

Factor integrante.

$$f(y) = -\frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{\cos y}{\sin y}\right)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int\frac{\cos y}{\sin y}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\ln \sin y}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln \sin y}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\sin y}$$

$$\frac{1}{\sin y}dv-\frac{\cos y}{\sin^2 y}vdy+\frac{1}{\sin y\cos y}dy=0$$

$$\frac{1}{\sin y}dv-\frac{\cos y}{\sin^2 y}vdy+\frac{2}{2\sin y\cos y}dy=0$$

$$\frac{1}{\sin y}dv-\frac{\cos y}{\sin^2 y}vdy+\frac{2}{\sin 2y}dy=0$$

$$\frac{1}{\sin y}dv-\frac{\cos y}{\sin^2 y}vdy+2\csc 2y\,dy=0$$

$$d\left(\frac{v}{\sin y}\right)+d[\ln(\csc 2y-\cot 2y)]=d(C)$$

$$\int d\left(\frac{v}{\sin y}\right)+\int d[\ln(\csc 2y-\cot 2y)]=\int d(C)$$

$$\frac{v}{\sin y}+\ln(\csc 2y-\cot 2y)=C$$

Entonces, la solución de la ED (*) es:

$$\frac{v}{\sin y}+\ln(\csc 2y-\cot 2y)=C\quad(**)$$

Sustituyendo $v=x^{-1}$ en la ecuación (**).

$$\frac{x^{-1}}{\sin y}+\ln(\csc 2y-\cot 2y)=C$$

$$\frac{x^{-1}}{\sin y}=C-\ln(\csc 2y-\cot 2y)$$

$$\frac{\csc y}{x}=C-\ln\left(\frac{1}{\sin 2y}-\frac{\cos 2y}{\sin 2y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x}=C-\ln\left(\frac{1-\cos 2y}{\sin 2y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x}=C-\ln\left(\frac{1-(\cos^2 y-\sin^2 y)}{\sin 2y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x}=C-\ln\left(\frac{1-\cos^2 y+\sin^2 y}{2\sin y\cos y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x} = C - \ln\left(\frac{\sin^2 y + \sin^2 y}{2\sin y \cos y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x} = C - \ln\left(\frac{2\sin^2 y}{2\sin y \cos y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x} = C - \ln\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x} = C + \ln\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)^{-1}$$

$$\frac{\csc y}{x} = C + \ln\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)$$

$$\frac{\csc y}{x} = C + \ln(\cot y)$$

$$\csc y = x(C + \ln(\cot y))$$

$$x(C + \ln(\cot y)) = \csc y$$

$\boldsymbol{x = \frac{\csc y}{C + \ln(\cot y)}}$, solución general de la ED.

12. $\frac{\sin 2x}{6} y' + y = (1 + \cos x) y^{\frac{2}{3}}$

Solución:

$$\frac{\sin 2x}{6}\frac{dy}{dx} + y = (1 + \cos x) y^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{6}{\sin 2x}\left(\frac{\sin 2x}{6}\frac{dy}{dx} + y\right) = \frac{6}{\sin 2x}(1 + \cos x) y^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{6}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{6}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{\sin 2x} y = \frac{6(1 + \cos x) y^{\frac{2}{3}}}{\sin 2x}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{\sin 2x} y = \frac{6(1+\cos x) y^{\frac{2}{3}}}{\sin 2x}$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = \frac{2}{3}$.

Multiplicamos la ED por $y^{-\frac{2}{3}}$.

$$y^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{6}{\sin 2x}y\right)=\frac{6(1+\cos x)y^{\frac{2}{3}}}{\sin 2x}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}+\frac{6}{\sin 2x}yy^{-\frac{2}{3}}=\frac{6(1+\cos x)}{\sin 2x}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}+\frac{6}{\sin 2x}y^{\frac{1}{3}}=\frac{6(1+\cos x)}{\sin 2x}$$

Sea:

$$\boldsymbol{v=y^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$3dv=y^{-\frac{2}{3}}dy$$

$$3\frac{dv}{dx}=y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$3\frac{dv}{dx}+\frac{6}{\sin 2x}v=\frac{6(1+\cos x)}{\sin 2x}$$

$$\frac{1}{3}\left(3\frac{dv}{dx}+\frac{6}{\sin 2x}v\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{6(1+\cos x)}{\sin 2x}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 3\frac{dv}{dx}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sin 2x}v=\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}$$

$$\frac{dv}{dx}+\frac{2}{\sin 2x}v=\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}$$

$\frac{dv}{dx}+2(\csc 2x)v=\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}+2v\csc 2x-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}=0$$

$$dv+\left[2v\csc 2x-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\right]dx=0\ \ (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(\csc 2x-\cot 2x)\left\{dv+\left[2v\csc 2x-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\right]dx\right\}=(\csc 2x-\cot 2x)0$$

$$(\csc 2x-\cot 2x)dv+(\csc 2x-\cot 2x)\left[2v\csc 2x-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\right]dx=0$$

$$(\csc 2x-\cot 2x)dv+2v(\csc^2 2x-\cot 2x\csc 2x)dx-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}(\csc 2x-\cot 2x)dx=0$$

$$d[v(\csc 2x-\cot 2x)]-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)=d(C)$$

$$d\left[v\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)\right]-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)dx=d(C)$$

$$d\left[v\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right)\right]-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right)dx=d(C)$$

$$d\left[v\left(\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin 2x}\right)\right]-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\left(\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin 2x}\right)dx=d(C)$$

$$d\left[v\left(\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin 2x}\right)\right]-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\left(\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin 2x}\right)dx=d(C)$$

$$d\left[v\left(\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin 2x}\right)\right]-\frac{2(1+\cos x)}{\sin 2x}\left(\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin 2x}\right)dx=d(C)$$

$$d\left[v\left(\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}\right)\right]-\frac{2(1+\cos x)}{2\sin x\cos x}\left(\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}\right)dx=d(C)$$

$$d\left[v\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right]-\frac{(1+\cos x)}{\sin x\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx=d(C)$$

$$d[v\tan x]-\frac{(1+\cos x)}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)dx=d(C)$$

Factor integrante.

$$f(x)=2\csc 2x$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int 2\csc 2x dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln(\csc 2x-\cot 2x)}$$

$$\boldsymbol{P}=\csc 2x-\cot 2x$$

$$d[v\tan x] - \frac{(1+\cos x)}{\cos^2 x}dx = d(C)$$

$$d[v\tan x] - \frac{1}{\cos^2 x}dx - \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = d(C)$$

$$d[v\tan x] - \sec^2 x\,dx - \frac{1}{\cos x}dx = d(C)$$

$$d[v\tan x] - \sec^2 x\,dx - \sec x\,dx = d(C)$$

$$d[v\tan x] - d(\tan x) - d(\ln(\sec x + \tan x)) = d(C)$$

$$\int d[v\tan x] - \int d(\tan x) - \int d(\ln(\sec x + \tan x)) = \int d(C)$$

$$v\tan x - \tan x - \ln(\sec x + \tan x) = C$$

$$v\tan x = \tan x + \ln(\sec x + \tan x) + C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$v\tan x = \tan x + \ln(\sec x + \tan x) + C \qquad (**)$$

Sustituyendo $v = y^{\frac{1}{3}}$ en la ecuación (**).

$$y^{\frac{1}{3}}\tan x = \tan x + \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$y^{\frac{1}{3}} = \frac{\tan x + \ln(\sec x + \tan x) + C}{\tan x}$$

$$y^{\frac{1}{3}} = \frac{\tan x}{\tan x} + \frac{\ln(\sec x + \tan x)}{\tan x} + \frac{C}{\tan x}$$

$$y^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\ln(\sec x + \tan x)}{\tan x} + \frac{C}{\tan x}$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$\boldsymbol{y^{\frac{1}{3}} = 1 + (\cot x)\ln(\sec x + \tan x) + C\cot x}$$

13. $dx - 2xydy = \frac{6x^3y^2}{e^{2y^2}}dy$

Solución:

$$dx - 2xydy = \frac{6x^3y^2}{e^{2y^2}}dy$$

$$dx = \frac{6x^3y^2}{e^{2y^2}}dy + 2xydy$$

$$dx = \left(\frac{6x^3y^2}{e^{2y^2}} + 2xy\right)dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{6x^3y^2}{e^{2y^2}} + 2xy$$

$\frac{dx}{dy} - 2xy = \frac{6x^3y^2}{e^{2y^2}}$, ED de Bernoulli en x con $n = 3$.

Multiplicamos por x^{-3} la ED.

$$x^{-3}\left(\frac{dx}{dy} - 2xy\right) = \frac{6x^3y^2}{e^{2y^2}}x^{-3}$$

$$x^{-3}\frac{dx}{dy} - 2xyx^{-3} = \frac{6y^2}{e^{2y^2}}$$

$$x^{-3}\frac{dx}{dy} - 2yx^{-2} = \frac{6y^2}{e^{2y^2}}$$

Sea:

$$\boldsymbol{v = x^{-2}}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}x^{-2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2x^{-3}$$

$$-\frac{1}{2}dv = x^{-3}dx$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} = x^{-3}\frac{dx}{dy}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} - 2yv = \frac{6y^2}{e^{2y^2}}$$

$$-2\left(-\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} - 2yv = \frac{6y^2}{e^{2y^2}}\right)$$

$\frac{dv}{dy} + 4yv = -\frac{12y^2}{e^{2y^2}}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dy} + 4yv + \frac{12y^2}{e^{2y^2}} = 0$$

$$dv + \left(4yv + \frac{12y^2}{e^{2y^2}}\right)dy = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$e^{2y^2}\left[dv + \left(4yv + \frac{12y^2}{e^{2y^2}}\right)dy\right] = 0 \cdot e^{2y^2}$$

$$e^{2y^2}dv + e^{2y^2}\left(4yv + \frac{12y^2}{e^{2y^2}}\right)dy = 0$$

$$e^{2y^2}dv + 4yve^{2y^2}dy + 12y^2dy = 0$$

$$d\left(ve^{2y^2}\right) + d(4y^3) = d(C)$$

$$\int d\left(ve^{2y^2}\right) + d\int(4y^3) = \int d(C)$$

$$ve^{2y^2} + 4y^3 = C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$ve^{2y^2} + 4y^3 = C \quad (**)$$

Sustituyendo $v = x^{-2}$ en la ecuación (**).

$$x^{-2}e^{2y^2} + 4y^3 = C$$

Factor integrante.

$f(y) = 4y$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 4ydy}$

$\boldsymbol{P} = e^{2y^2}$

$x^{-2}e^{2y^2} = C - 4y^3$

$x^{-2} = \dfrac{C - 4y^3}{e^{2y^2}}$

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{C - 4y^3}{e^{2y^2}}$

$\boldsymbol{x^2 = \frac{e^{2y^2}}{C-4y^3}}$, solución general de la ED.

14. $xy' + y = x^2y^2 \ln x\,;\qquad y(1) = \frac{1}{2}$

Solución:

$x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2 \ln x$

$\dfrac{1}{x}\left(x\dfrac{dy}{dx} + y\right) = \dfrac{1}{x} \cdot x^2y^2 \ln x\,;\qquad x \neq 0$

$\dfrac{1}{x} \cdot x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = xy^2 \ln x$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2 \ln x$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = 2$.

Multiplicamos y^{-2} en la ED.

$y^{-2}\left(\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y\right) = y^{-2}xy^2 \ln x$

$y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}yy^{-2} = x \ln x$

$y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y^{-1} = x \ln x$

Sea:

$\boldsymbol{v = y^{-1}}$

$\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{d}{dy}y^{-1}$

$$\frac{dv}{dy} = -y^{-2}$$

$$-dv = y^{-2}dy$$

$$-\frac{dv}{dx} = y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x\ln x$$

$$-\left(-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x\ln x\right)$$

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x\ln x$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v + x\ln x = 0$$

$$dv + \left(-\frac{1}{x}v + x\ln x\right)dx = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{x}\left[dv + \left(-\frac{1}{x}v + x\ln x\right)dx\right] = \frac{1}{x}\cdot 0; \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x}dv + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}v + x\ln x\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{x}dv - \frac{v}{x^2}dx + \ln x\,dx = 0$$

$$d\left(\frac{v}{x}\right) + d(x\ln x - x) = d(C)$$

$$\int d\left(\frac{v}{x}\right) + \int d(x\ln x - x) = \int d(C)$$

$$\frac{v}{x} + x\ln x - x = C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

Factor integrante.

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\int\frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln x}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln x}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x}$

$$\frac{v}{x} + x\ln x - x = C \quad (**)$$

Sustituyendo $v = y^{-1}$ en la ecuación (**).

$$\frac{y^{-1}}{x} + x\ln x - x = C$$

$$\frac{1}{xy} + x\ln x - x = C$$

Calculamos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}} + 1\ln 1 - 1 = C$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} + 1\cdot 0 - 1 = C$$

$$2 - 1 = C$$

$$1 = C \qquad \rightarrow \quad C = 1$$

$$\frac{1}{xy} + x\ln x - x = 1$$

$$\frac{1}{xy} = 1 + x - x\ln x$$

$$1 = xy(1 + x - x\ln x)$$

$$1 = y(x + x^2 - x\ln x)$$

$$y(x + x^2 - x\ln x) = 1$$

Luego, la solución particular de la ED es:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x + x^2 - x\ln x}}$$

15. $2xydx + x^2dy + x^2ydy = e^ydy$; $y(\sqrt{e}) = 1$

Solución:

$$2xydx + x^2dy + x^2ydy = e^ydy$$

$$2xydx = e^ydy - x^2dy - x^2ydy$$

$$2xydx = (e^y - x^2 - x^2y)dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^y - x^2 - x^2y}{2xy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^y}{2xy} - \frac{x^2(1+y)}{2xy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^y}{2xy} - \frac{x(1+y)}{2y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x(1+y)}{2y} = \frac{e^y}{2y}x^{-1}$$

$\frac{dx}{dy} + \frac{1+y}{2y}x = \frac{e^y}{2y}x^{-1}$, ED de Bernoulli en x con $n = -1$.

Multiplicamos por x la ED.

$$x\left(\frac{dx}{dy} + \frac{1+y}{2y}x\right) = \frac{e^y}{2y}x^{-1}x$$

$$x\frac{dx}{dy} + \frac{1+y}{2y}xx = \frac{e^y}{2y}$$

$$x\frac{dx}{dy} + \frac{1+y}{2y}x^2 = \frac{e^y}{2y}$$

Sea:

$$\boldsymbol{v = x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{1}{2}dv = xdx$$

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} = x\frac{dx}{dy}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} + \frac{1+y}{2y}v = \frac{e^y}{2y}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} + \frac{1+y}{2y}v = \frac{e^y}{2y}\right)$$

$\frac{dv}{dy} + \frac{1+y}{y}v = \frac{e^y}{y}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dy} + \frac{1+y}{y}v - \frac{e^y}{y} = 0$$

$$dv + \left(\frac{1+y}{y}v - \frac{e^y}{y}\right)dy = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$ye^y\left[dv + \left(\frac{1+y}{y}v - \frac{e^y}{y}\right)dy\right] = 0 \cdot ye^y$$

$$ye^y dv + ye^y\left(\frac{1+y}{y}v - \frac{e^y}{y}\right)dy = 0$$

$$ye^y dv + ve^y(1+y)dy - e^{2y}dy = 0$$

$$d[vye^y] - d\left(\frac{1}{2}e^{2y}\right) = d(C)$$

$$\int d[vye^y] - \int d\left(\frac{1}{2}e^{2y}\right) = \int d(C)$$

$$vye^y - \frac{1}{2}e^{2y} = C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$vye^y - \frac{1}{2}e^{2y} = C \quad (**)$$

Factor integrante.

$$f(y) = \frac{1+y}{y}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1+y}{y}dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{y}\right)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\frac{1}{y}dy+\int dy}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln y+y}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln y}e^y$$

$$\boldsymbol{P} = ye^y$$

Sustituyendo $v = x^2$ en la ecuación (**).

$$x^2ye^y - \frac{1}{2}e^{2y} = C$$

Calculando la solución particular de la ED para $x = \sqrt{e}$, $y = 1$.

$$\left(\sqrt{e}\right)^2 1e^1 - \frac{1}{2}e^2 = C$$

$$ee - \frac{1}{2}e^2 = C$$

$$e^2 - \frac{1}{2}e^2 = C$$

$$\frac{1}{2}e^2 = C \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{1}{2}e^2$$

$$x^2ye^y - \frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{2}e^2$$

$$x^2ye^y = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{2y}$$

$$2\left(x^2ye^y = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^{2y}\right)$$

$$2x^2ye^y = e^{2y} + e^2$$

$$2x^2y = \frac{e^{2y} + e^2}{e^y}$$

$$2x^2y = \frac{e^{2y}}{e^y} + \frac{e^2}{e^y}$$

Luego, la solución particular de la ED es:

$$\boldsymbol{2x^2y = e^y + e^{2-y}}$$

16. $xy' - 2y = 4x^3y^{\frac{1}{2}}; \quad y(1) = 0$

Solución:

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 4x^3y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x}\left(x\frac{dy}{dx} - 2y\right) = \frac{1}{x} \cdot 4x^3y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x} \cdot x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}2y = 4x^2y^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 4x^2y^{\frac{1}{2}}$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = \frac{1}{2}$.

Multiplicamos por $y^{-\frac{1}{2}}$ en la ED.

$$y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y\right) = 4x^2y^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$$

$$y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}yy^{-\frac{1}{2}} = 4x^2$$

$$y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y^{\frac{1}{2}} = 4x^2$$

Sea:

$$\boldsymbol{v = y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

$$2dv = y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$2\frac{dv}{dx} = y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$2\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = 4x^2$$

$$\frac{1}{2}\left(2\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = 4x^2\right)$$

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 2x^2$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v - 2x^2 = 0$$

$$dv + \left(-\frac{1}{x}v - 2x^2\right)dx = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{x}\left[dv + \left(-\frac{1}{x}v - 2x^2\right)dx\right] = \frac{1}{x}\cdot 0; \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x}dv + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}v - 2x^2\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{x}dv - \frac{v}{x^2}dx - 2xdx = 0$$

$$d\left(\frac{v}{x}\right) - d(x^2) = d(C)$$

$$\int d\left(\frac{v}{x}\right) - \int d(x^2) = \int d(C)$$

$$\frac{v}{x} - x^2 = C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$\frac{v}{x} - x^2 = C \qquad (**)$$

Sustituyendo $v = y^{\frac{1}{2}}$ en la ecuación (**).

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} - x^2 = C$$

Calculemos la solución particular de la ED para $x = 1$, $y = 0$.

Factor integrante.

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int\frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\ln x}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{0^{\frac{1}{2}}}{1} - 1^2 = C$$

$$\frac{0}{1} - 1 = C$$

$$0 - 1 = C$$

$$-1 = C \qquad \rightarrow \qquad C = -1$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} - x^2 = -1$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} = x^2 - 1$$

$$y^{\frac{1}{2}} = x(x^2 - 1)$$

$$y^{\frac{1}{2}} = x^3 - x$$

$$\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (x^3 - x)^2$$

$\boldsymbol{y = (x^3 - x)^2}$, solución particular de la ED.

17. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x + 1} + y^2 = 0$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -y^2$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = 2$.

Multiplicamos por y^{-2} la ED.

$$y^{-2}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x + 1}\right) = -y^2 y^{-2}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x + 1}y^{-2} = -1$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}y^{-1}=-1$$

Sea:

$\boldsymbol{v=y^{-1}}$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{d}{dy}y^{-1}$$

$$\frac{dv}{dy}=-y^{-2}$$

$$dv=-y^{-2}dy$$

$$-(dv=-y^{-2}dy)$$

$$-dv=y^{-2}dy$$

$$-\frac{dv}{dx}=y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x+1}v=-1$$

$$-\left(-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x+1}v=-1\right)$$

$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x+1}v=1$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x+1}v-1=0$$

$$dv+\left(-\frac{v}{x+1}-1\right)dx=0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{x+1}\left[dv+\left(-\frac{v}{x+1}-1\right)dx\right]=\frac{1}{x+1}\cdot 0; \quad x\neq -1$$

$$\frac{1}{x+1}dv+\frac{1}{x+1}\left(-\frac{v}{x+1}-1\right)dx=0$$

Factor integrante.

$f(x)=-\frac{1}{x+1}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(-\frac{1}{x+1}\right)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\int\frac{1}{x+1}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\ln(x+1)}$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\ln(x+1)}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{x+1}dv - \frac{v}{(x+1)^2}dx - \frac{1}{x+1}dx = 0$$

$$d\left[\frac{v}{x+1}\right] - d[\ln(x+1)] = d(C)$$

$$\int d\left[\frac{v}{x+1}\right] - \int d[\ln(x+1)] = \int d(C)$$

$$\frac{v}{x+1} - \ln(x+1) = C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$\frac{v}{x+1} - \ln(x+1) = C \qquad (**)$$

Sustituyendo $v = y^{-1}$ en la ecuación (**).

$$\frac{y^{-1}}{x+1} - \ln(x+1) = C$$

$$\frac{y^{-1}}{x+1} = C + \ln(x+1)$$

$$(y^{-1})^{-1} = \{(x+1)[C + \ln(x+1)]\}^{-1}$$

$\boldsymbol{y = \frac{1}{(x+1)[C+\ln(x+1)]}}$, solución general de la ED.

18. $(y^4 - 2xy)dx + 3x^2dy = 0; \qquad y(2) = 1$

Solución:

$$(y^4 - 2xy)dx + 3x^2dy = 0$$

$$3x^2dy = -(y^4 - 2xy)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(y^4 - 2xy)}{3x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^4 + 2xy}{3x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^4}{3x^2} + \frac{2xy}{3x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^4}{3x^2} + \frac{2y}{3x}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x}y = -\frac{y^4}{3x^2}$, ED de Bernoulli en y con $n = 4$.

Multiplicamos por y^{-4} la ED.

$$y^{-4}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x}y\right) = -\frac{y^4}{3x^2}y^{-4}$$

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x}yy^{-4} = -\frac{1}{3x^2}$$

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x}y^{-3} = -\frac{1}{3x^2}$$

Sea:

$$\boldsymbol{v = y^{-3}}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy}y^{-3}$$

$$\frac{dv}{dy} = -3y^{-4}$$

$$-\frac{1}{3}dv = y^{-4}dy$$

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} = y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} - \frac{2}{3x}v = -\frac{1}{3x^2}$$

$$-3\left(-\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} - \frac{2}{3x}v = -\frac{1}{3x^2}\right)$$

$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^2}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v-\frac{1}{x^2}=0$$

$$dv+\left(\frac{2}{x}v-\frac{1}{x^2}\right)dx=0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$x^2\left[dv+\left(\frac{2}{x}v-\frac{1}{x^2}\right)dx\right]=0\cdot x^2$$

$$x^2dv+x^2\left(\frac{2}{x}v-\frac{1}{x^2}\right)dx=0$$

$$x^2dv+2xvdx-dx=0$$

$$d(vx^2)-d(x)=d(C)$$

$$\int d(vx^2)-\int d(x)=\int d(C)$$

$$vx^2-x=C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$vx^2-x=C \quad (**)$$

Sustituyendo $v=y^{-3}$ en la ecuación (**).

$$y^{-3}x^2-x=C$$

$$\frac{x^2}{y^3}-x=C$$

Calculando la solución particular de la ED para $x=2$, $y=1$.

$$\frac{2^2}{1^3}-2=C$$

$$\frac{4}{1}-2=C$$

$$4-2=C$$

$$2=C \quad \rightarrow \quad C=2$$

Factor integrante.

$$f(x)=\frac{2}{x}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{2}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{2\int\frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{2\ln x}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x^2}$$

$$\boldsymbol{P}=x^2$$

$$\frac{x^2}{y^3} - x = 2$$

$$\frac{x^2}{y^3} = x + 2$$

$\boldsymbol{x^2 = y^3(x+2)}$, solución particular de la ED.

19. $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$

Solución:

$$8x\frac{dy}{dx} - y = -\frac{y^{-3}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{1}{8x}\left(8x\frac{dy}{dx} - y\right) = \frac{1}{8x} \cdot -\frac{y^{-3}}{\sqrt{x+1}}; \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{8x} \cdot 8x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{8x}y = -\frac{y^{-3}}{8x\sqrt{x+1}}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{8x}y = -\frac{y^{-3}}{8x\sqrt{x+1}}$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = -3$

Multiplicamos por y^3 la ED.

$$y^3\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{8x}y\right) = -\frac{y^{-3}}{8x\sqrt{x+1}}y^3$$

$$y^3\frac{dy}{dx} - \frac{1}{8x}yy^3 = -\frac{1}{8x\sqrt{x+1}}$$

$$y^3\frac{dy}{dx} - \frac{1}{8x}y^4 = -\frac{1}{8x\sqrt{x+1}}$$

Sea:

$\boldsymbol{v = y^4}$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy}y^4$$

$$\frac{dv}{dy} = 4y^3$$

$$\frac{1}{4}dv = y^3 dy$$

$$\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} = y^3\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{8x}v = -\frac{1}{8x\sqrt{x+1}}$$

$$4\left(\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{8x}v = -\frac{1}{8x\sqrt{x+1}}\right)$$

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2x}v = -\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2x}v + \frac{1}{2x\sqrt{x+1}} = 0$$

$$dv + \left(-\frac{v}{2x} + \frac{1}{2x\sqrt{x+1}}\right)dx = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\left[dv + \left(-\frac{v}{2x} + \frac{1}{2x\sqrt{x+1}}\right)dx\right] = 0 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dv + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{v}{2x} + \frac{1}{2x\sqrt{x+1}}\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dv - \frac{v}{2x^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+1}}dx = 0$$

$$d\left(\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+1}}dx = d(C)$$

$$\int d\left(\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}\right) + \int \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+1}}dx = \int d(C)$$

Factor integrante.

$$f(x) = -\frac{1}{2x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{1}{2x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{1}{2}\ln x}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln x}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln x^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+1}}dx=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{xx^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1}}dx=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}dx=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x+1}}dx=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{xx\sqrt{x+1}}dx=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{z}{1-z}\right)^2}\sqrt{z}\frac{1}{(1-z)^2}dz=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{z^2}{(1-z)^2}}\sqrt{z}\frac{1}{(1-z)^2}dz=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^2}dz=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int z^{-2}\,z^{\frac{1}{2}}dz=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}=C$$

$$\frac{v}{x^{\frac{1}{2}}}-z^{-\frac{1}{2}}=C$$

Escribiendo z en términos de x.

Sustitución.

$$z=\frac{x}{x+1}$$

$$z(x+1)=x$$

$$xz+z=x$$

$$z=x-xz$$

$$z=x(1-z)$$

$$x(1-z)=z$$

$$x=\frac{z}{1-z}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{(1-z)\frac{d}{dz}(z)-z\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{(1-z)(1)-z(-1)}{(1-z)^2}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{1-z+z}{(1-z)^2}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$dx=\frac{1}{(1-z)^2}dz$$

$$\frac{v}{\sqrt{x}} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} = C$$

$$\frac{v}{\sqrt{x}} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = C$$

$$\frac{v}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x+1}{x}} = C$$

$$\frac{v}{\sqrt{x}} = C + \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$\frac{v}{\sqrt{x}} = C + \sqrt{\frac{x+1}{x}} \qquad (**)$$

Sustituyendo $v = y^4$ en la ecuación (**).

$$\frac{y^4}{\sqrt{x}} = C + \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

$$y^4 = \sqrt{x}\left(C + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$y^4 = C\sqrt{x} + \sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$\boldsymbol{y^4 = C\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

20. $xy' = 2x^3y + y\ln y$

Solución:

$$x\frac{dy}{dx} = 2x^3y + y\ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3y + y\ln y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3y}{x} + \frac{y\ln y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2y + \frac{y\ln y}{x}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{\ln y}{x}y = 2x^2y$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = 1$.

Multiplicamos por y^{-1} la ED.

$$y^{-1}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\ln y}{x}y\right) = 2x^2yy^{-1}$$

$$y^{-1}\frac{dy}{dx} - \frac{\ln y}{x}yy^{-1} = 2x^2$$

$$y^{-1}\frac{dy}{dx} - \frac{\ln y}{x} = 2x^2$$

Sea:

$\boldsymbol{v = \ln y}$

$\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy}\ln y$

$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{y}$

$\frac{dv}{dy} = y^{-1}$

$dv = y^{-1}dy$

$\frac{dv}{dx} = y^{-1}\frac{dy}{dx}$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 2x^2$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v - 2x^2 = 0$$

$$dv + \left(-\frac{1}{x}v - 2x^2\right)dx = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{x}\left[dv + \left(-\frac{1}{x}v - 2x^2\right)dx\right] = \frac{1}{x}\cdot 0; \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x}dv + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}v - 2x^2\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{x}dv - \frac{v}{x^2}dx - 2xdx = 0$$

$$d\left(\frac{v}{x}\right) - d(x^2) = d(C)$$

$$\int d\left(\frac{v}{x}\right) - \int d(x^2) = \int d(C)$$

$$\frac{v}{x} - x^2 = C$$

Entonces, la solución general de la ED (*) es:

$$\frac{v}{x} - x^2 = C \quad (**)$$

Sustituyendo $v = \ln y$ en la ecuación (**).

$$\frac{\ln y}{x} - x^2 = C$$

$$\frac{\ln y}{x} = C + x^2$$

$$\ln y = x(C + x^2)$$

Luego, la solución general de la ED es:

$$\boldsymbol{y = e^{x(C+x^2)}}$$

Factor integrante.

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int -\frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\ln x}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x}$$

3.10 Ecuaciones diferenciales de Ricatti

3.10.1 Soluciones de ED de Ricatti

• Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Ricatti.

1. $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$, una solución es $y_1 = \frac{1}{2x} + \tan x$.

Solución:

Verifiquemos que $y_1 = \frac{1}{2x} + \tan x$ es solución de $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$ (R_1).

Calculamos la primera derivada de y_1.

$y_1 = \frac{1}{2x} + \tan x$

$\frac{d}{dx}y_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x} + \tan x\right)$

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x}\right) + \frac{d}{dx}(\tan x)$

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \sec^2 x$

$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-2} + \sec^2 x$

$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x$

Sustituyendo, tenemos:

$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x = \left(\frac{1}{2x} + \tan x\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x} + \tan x\right) + 1 - \frac{1}{4x^2}$

$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x = \cancel{\frac{1}{4x^2}} + 2\left(\frac{1}{2x}\right)\tan x + \tan^2 x - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\tan x + 1 - \cancel{\frac{1}{4x^2}}$

$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x = \cancel{\frac{1}{x}\tan x} + (\tan^2 x + 1) - \frac{1}{2x^2} - \cancel{\frac{1}{x}\tan x}$

$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x = \sec^2 x - \frac{1}{2x^2}$, $\qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x = -\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x$

Luego $y_1 = \frac{1}{2x} + \tan x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \tan x + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x} + \tan x + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x} + \tan x\right) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(\tan x) - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-2} + \sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1}{2x} + \tan x + \frac{1}{v}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x} + \tan x + \frac{1}{v}\right) + 1 - \frac{1}{4x^2}$$

$$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \left[\left(\frac{1}{2x} + \tan x\right) + \frac{1}{v}\right] - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x} + \tan x + \frac{1}{v}\right) + 1 - \frac{1}{4x^2}$$

$$-\frac{1}{2x^2} + \sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1}{2x} + \tan x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2x} + \tan x\right)\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\tan x - \frac{1}{x}\frac{1}{v} + 1 - \frac{1}{4x^2}$$

$$\sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{4x^2} + 2\left(\frac{1}{2x}\right)\tan x + \tan^2 x + \frac{1}{x}\frac{1}{v} + 2\frac{1}{v}\tan x + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{x}\tan x - \frac{1}{x}\frac{1}{v} + 1 - \frac{1}{4x^2}$$

$$\sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\tan x + (\tan^2 x + 1) + 2\frac{1}{v}\tan x + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{x}\tan x$$

$$\sec^2 x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \sec^2 x + 2\frac{1}{v}\tan x + \frac{1}{v^2}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 2\frac{1}{v}\tan x + \frac{1}{v^2} \ (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ la ecuación (*).

$$-v^2\left(-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 2\frac{1}{v}\tan x + \frac{1}{v^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = -2v\tan x - 1$$

$\frac{dv}{dx} + (2\tan x)v = -1$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + (2\tan x)v + 1 = 0$

$dv + [(2\tan x)v + 1]dx = 0$ (**)

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$\frac{1}{\cos^2 x}\{dv + [(2\tan x)v + 1]dx = 0\}$

$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot dv + \frac{1}{\cos^2 x}[(2\tan x)v + 1]dx = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 0$

$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot dv + \left[\frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2v\tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 1\right]dx = 0$

$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot dv + 2v\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}dx + \frac{1}{\cos^2 x}dx = 0$

$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot dv + 2v\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx + \sec^2 x\, dx = 0$

$\left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot dv + 2v\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx\right) + \sec^2 x\, dx = 0$

$d\left(\frac{v}{\cos^2 x}\right) + d(\tan x) = d(C)$

$d\left(\frac{v}{\cos^2 x} + \tan x\right) = d(c)$

$\int d\left(\frac{v}{\cos^2 x} + \tan x\right) = \int d(c)$

$\frac{v}{\cos^2 x} + \tan x = C$, solución general de la ED (**).

$\frac{v}{\cos^2 x} = C - \tan x$

$v = \cos^2 x\,(C - \tan x)$

Reemplazando v en $y = \frac{1}{2x} + \tan x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = \frac{1}{2x} + \tan x + \frac{1}{\cos^2 x\,(C - \tan x)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x\,(C - \tan x)}$$

Factor integrante.

$f(x) = 2\tan x$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 2\tan x dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{2\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-2\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-2\ln(\cos x)}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(\cos x)^{-2}}$

$\boldsymbol{P} = (\cos x)^{-2}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos x\,(C - \tan x)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \left(C \cos x - \cos x \frac{\sin x}{\cos x}\right)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x\,(C \cos x - \sin x)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{\sin x\,(C \cos x - \sin x) + 1}{\cos x\,(C \cos x - \sin x)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{C \sin x \cos x - \sin^2 x + 1}{\cos x\,(C \cos x - \sin x)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{C \sin x \cos x - (1 - \cos^2 x) + 1}{\cos x\,(C \cos x - \sin x)} \;; \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{C \sin x \cos x - 1 + \cos^2 x + 1}{\cos x\,(C \cos x - \sin x)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{C \sin x \cos x + \cos^2 x}{\cos x\,(C \cos x - \sin x)}$$

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{\cos x\,(C \sin x + \cos x)}{\cos x\,(C \cos x - \sin x)}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2x} + \frac{C \sin x + \cos x}{C \cos x - \sin x}}$$

2. $\frac{dy}{dx} = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1)$, una solución es $y_1 = x$.

Solución:

Verifiquemos que $y_1 = x$ es solución de $\frac{dy}{dx} = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1)$ (R_1).

Calculemos la primera derivada de y_1.

$y_1 = x$

$\frac{d}{dx} y_1 = \frac{d}{dx} x$

$\frac{dy_1}{dx} = 1$

Sustituyendo, tenemos:

$1 = -8x(x)^2 + 4x(4x+1)x - (8x^3 + 4x^2 - 1)$

$1 = -8xx^2 + 4x^2(4x+1) - 8x^3 - 4x^2 + 1$

$1 = -8x^3 + 16x^3 + 4x^2 - 8x^3 - 4x^2 + 1$

$1 = -16x^3 + 16x^3 + 1$

$1 = 1$

Luego $y_1 = x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$$y = x + \frac{1}{v}$$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = 1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -8x\left(x + \frac{1}{v}\right)^2 + 4x(4x+1)\left(x + \frac{1}{v}\right) - (8x^3 + 4x^2 - 1)$

$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -8x\left(x^2 + 2\frac{x}{v} + \frac{1}{v^2}\right) + 4x(4x+1)\left(x + \frac{1}{v}\right) - 8x^3 - 4x^2 + 1$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -8x^3 - 16\frac{x^2}{v} - 8\frac{x}{v^2} + 4x\left(4x^2 + 4\frac{x}{v} + x + \frac{1}{v}\right) - 8x^3 - 4x^2$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -8x^3 - 16\frac{x^2}{v} - 8\frac{x}{v^2} + 16x^3 + 16\frac{x^2}{v} + 4x^2 + 4\frac{x}{v} - 8x^3 - 4x^2$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -16x^3 - 8\frac{x}{v^2} + 16x^3 + 4\frac{x}{v}$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -8\frac{x}{v^2} + 4\frac{x}{v}$ (*)

Multipliquemos por $-v^2$ la ED (*).

$-v^2\left(-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -8\frac{x}{v^2} + 4\frac{x}{v}\right)$

$\frac{dv}{dx} = 8x - 4xv$

$\frac{dv}{dx} + 4xv = 8x$, la ED es lineal en v.

Factor integrante.

$f(x) = 4x$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 4xdx}$

$\boldsymbol{P} = e^{2\int 2xdx}$

$\boldsymbol{P} = e^{2x^2}$

$\frac{dv}{dx} + 4xv - 8x = 0$

$dv + (4xv - 8x)dx = 0$ (**)

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$e^{2x^2}[dv + (4xv - 8x)dx = 0]$

$e^{2x^2}dv + e^{2x^2}(4xv - 8x)dx = e^{2x^2} \cdot 0$

$e^{2x^2}dv + \left(4xve^{2x^2} - 8xe^{2x^2}\right)dx = 0$

$e^{2x^2}dv + 4xve^{2x^2}dx - 8xe^{2x^2}dx = 0$

$\left(e^{2x^2}dv + 4xve^{2x^2}dx\right) - 8xe^{2x^2}dx = 0$

$d\left(ve^{2x^2}\right) + d\left(-2e^{2x^2}\right) = d(C)$

$d\left(ve^{2x^2} - 2e^{2x^2}\right) = d(C)$

$\int d\left(ve^{2x^2} - 2e^{2x^2}\right) = \int d(C)$

$ve^{2x^2} - 2e^{2x^2} = C$

$ve^{2x^2} = 2e^{2x^2} + C$

$v = \frac{2e^{2x^2}+C}{e^{2x^2}}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = x + \frac{1}{\frac{2e^{2x^2} + C}{e^{2x^2}}}$$

$$y = x + \frac{1}{\frac{2e^{2x^2}}{e^{2x^2}} + \frac{C}{e^{2x^2}}}$$

$$y = x + \frac{1}{2 + \frac{C}{e^{2x^2}}}$$

$$y = x + \frac{1}{2 + Ce^{-2x^2}}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = x + \left(2 + Ce^{-2x^2}\right)^{-1}}$$

3. $y' - (\sin^2 x)y^2 + \frac{1}{\sin x \cos x} y + \cos^2 x = 0$, una solución es $y_1 = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Solución:

$$y' - (\sin^2 x)y^2 + \frac{1}{\sin x \cos x} y + \cos^2 x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - (\sin^2 x)y^2 + \frac{1}{\sin x \cos x} y + \cos^2 x = 0$$

Verifiquemos que $y_1 = \frac{\cos x}{\sin x}$ es solución de $y' - (\sin^2 x)y^2 + \frac{1}{\sin x \cos x} y + \cos^2 x = 0$ (R_1).

Calculemos la primera derivada de y_1.

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y_1 = \cot x, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx} y_1 = \frac{d}{dx} \cot x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -\csc^2 x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

Sustituyendo, tenemos:

$$-\frac{1}{\sin^2 x} - (\sin^2 x)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 + \frac{1}{\sin x \cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^2 x = 0$$

$$-\frac{1}{\sin^2 x} - (\sin^2 x)\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^2 x = 0$$

$$-\frac{1}{\sin^2 x} - \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x = 0$$

$$0 = 0$$

Luego $y_1 = \frac{\cos x}{\sin x}$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{v}$

$y = \cot x + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(\cot x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$-\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - (\sin^2 x)\left(\cot x + \frac{1}{v}\right)^2 + \frac{1}{\sin x \cos x}\left(\cot x + \frac{1}{v}\right) + \cos^2 x = 0$

$-\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - (\sin^2 x)\left(\cot^2 x + 2\frac{1}{v}\cot x + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{\cot x}{\sin x \cos x} + \frac{1}{v \sin x \cos x} + \cos^2 x = 0$

$-\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - \sin^2 x \cot^2 x - 2\frac{1}{v}\sin^2 x \cot x - \frac{1}{v^2}\sin^2 x + \frac{\cot x}{\sin x \cos x} + \frac{1}{v \sin x \cos x} + \cos^2 x = 0$

$-\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - \sin^2 x \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 2\frac{1}{v}\sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{v^2}\sin^2 x + \frac{1}{\sin x \cos x}\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{v \sin x \cos x} + \cos^2 x = 0$

$-\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - \cos^2 x - 2\frac{1}{v}\sin x \cos x - \frac{1}{v^2}\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{v \sin x \cos x} + \cos^2 x = 0$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - 2\frac{1}{v}\sin x \cos x - \frac{1}{v^2}\sin^2 x + \frac{1}{v \sin x \cos x} = 0$ (*)

Multiplicamos por $-v^2$ la ecuación (*).

$-v^2\left[-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - 2\frac{1}{v}\sin x \cos x - \frac{1}{v^2}\sin^2 x + \frac{1}{v \sin x \cos x} = 0\right]$

$-v^2 \cdot -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - (-v^2)\cdot 2\frac{1}{v}\sin x \cos x - (-v^2)\cdot\frac{1}{v^2}\sin^2 x + (-v^2)\frac{1}{v \sin x \cos x} = -v^2 \cdot 0$

$\frac{dv}{dx} + 2v \sin x \cos x + \sin^2 x - v\frac{1}{\sin x \cos x} = 0$

$\frac{dv}{dx} + 2v \sin x \cos x - \frac{v}{\sin x \cos x} = -\sin^2 x$

$\frac{dv}{dx} + \left(2 \sin x \cos x - \frac{1}{\sin x \cos x}\right) v = -\sin^2 x$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}+\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)v+\sin^2 x=0$$

$$dv+\left[\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)v+\sin^2 x\right]dx=0 \quad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\left\{dv+\left[\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)v+\sin^2 x\right]dx=0\right\}$$

$$\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}dv+\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\left[\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)v+\sin^2 x\right]dx=\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\cdot 0$$

$$\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}dv+\left[\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)v+\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\cdot\sin^2 x\right]dx=0$$

$$\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}dv+\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)vdx+\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\cdot\sin^2 x\,dx=0$$

$$\left[\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}dv+\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)vdx\right]+\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\cdot\sin^2 x\,dx=0$$

$$d\left(v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\right)+e^{\sin^2 x}\cot x\sin^2 x\,dx=0$$

$$d\left(v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\right)+e^{\sin^2 x}\frac{\cos x}{\sin x}\sin^2 x\,dx=0$$

$$d\left(v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\right)+e^{\sin^2 x}\sin x\cos x\,dx=0$$

$$d\left(v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}\right)+d\left(\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\right)=d(C)$$

$$d\left(v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}+\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\right)=d(C)$$

$$\int d\left(v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}+\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\right)=\int d(C)$$

$v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}+\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}=C$, solución general de la ED (**).

$$v\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}=C-\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}$$

$$ve^{\sin^2 x}=\tan x\left(C-\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\right)$$

Factor integrante.

$$f(x)=2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(2\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(2\sin x\cos x-\frac{\sec^2 x}{\sin x\cos x\sec^2 x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(2\sin x\cos x-\frac{\sec^2 x}{\sin x\cos x\frac{1}{\cos^2 x}}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(2\sin x\cos x-\frac{\sec^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(2\sin x\cos x-\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int 2\sin x\cos x dx-\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\sin^2 x-\ln(\tan x)}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\sin^2 x}e^{-\ln(\tan x)}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{e^{\sin^2 x}}{e^{\ln(\tan x)}}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{e^{\sin^2 x}}{\tan x}$$

$$v = \tan x \left(\frac{C - \frac{1}{2} e^{\sin^2 x}}{e^{\sin^2 x}} \right)$$

$$v = \tan x \left(\frac{C}{e^{\sin^2 x}} - \frac{e^{\sin^2 x}}{2e^{\sin^2 x}} \right)$$

$$v = \tan x \left(Ce^{-\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)$$

Reemplazando v en $y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\tan x \left(Ce^{-\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)}$$

$$y = \cot x + \cot x \left(Ce^{-\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

$$y = \cot x \left[1 + \left(Ce^{-\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \right]$$

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \left[1 + \left(Ce^{-\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \right]$$

Luego, la solución general de la ED (R_1).

$$\boldsymbol{y = \frac{\cos x}{\sin x} \left[1 + \left(Ce^{-\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \right]}$$

4. $y' = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$, una solución es $y_1 = -e^x$.

Solución:

$y' = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$

$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$

Verifiquemos que $y_1 = -e^x$es solución de $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2 \;\; (R_1)$.

Calculemos la primera derivada de y_1.

$y_1 = -e^x$

$\frac{d}{dx}y_1 = \frac{d}{dx}(-e^x)$

$\frac{dy_1}{dx} = -e^x$

Sustituyendo, tenemos:

$-e^x = e^{2x} + (1 + 2e^x)(-e^x) + (-e^x)^2$

$-e^x = e^{2x} - e^x - 2e^x e^x + e^{2x}$

$-e^x = 2e^{2x} - e^x - 2e^{2x}$

$-e^x = -e^x$

Luego $y_1 = -e^x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = -e^x + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(-e^x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-e^x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = -e^x - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = -e^x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$-e^x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)\left(-e^x + \frac{1}{v}\right) + \left(-e^x + \frac{1}{v}\right)^2$

$-\cancel{e^x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = e^{2x} - \cancel{e^x} - 2e^x e^x + \frac{1}{v} + \cancel{2\frac{1}{v}e^x} + e^{2x} - \cancel{2\frac{1}{v}e^x} + \frac{1}{v^2}$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{2e^{2x}} - \cancel{2e^{2x}} + \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}$ (*)

Multiplicamos por $-v^2$ la ecuación (*).

$-v^2\left(-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}\right)$

$\frac{dv}{dx} = -v - 1$

$\frac{dv}{dx} + v = -1$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + v + 1 = 0$

Factor integrante.

$f(x) = 1$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1dx}$

$\boldsymbol{P} = e^x$

$dv + (v + 1)dx = 0$ (**)

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$e^x[dv + (v + 1)dx = 0]$

$e^x dv + e^x(v + 1)dx = e^x \cdot 0$

$e^x dv + (ve^x + e^x)dx = 0$

$e^x dv + ve^x dx + e^x dx = 0$

$(e^x dv + ve^x dx) + e^x dx = 0$

$d(ve^x) + d(e^x) = d(C)$

$d(ve^x + e^x) = d(C)$

$\int d(ve^x + e^x) = \int d(C)$

$ve^x + e^x = C$

$ve^x = C - e^x$

$v = \frac{C-e^x}{e^x}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = -e^x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = -e^x + \frac{1}{\frac{C - e^x}{e^x}}$$

$$y = -e^x + \frac{1}{\frac{C}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}}$$

$$y = -e^x + \frac{1}{Ce^{-x} - 1}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = -e^x + \frac{1}{Ce^{-x} - 1}}$$

5. $\frac{dy}{dx} = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$, una solución es $y_1 = 1$.

Solución:

Verificamos que $y_1 = 1$ es solución de $\frac{dy}{dx} = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x \quad (R_1)$.

Calculamos la primera derivada de y_1.

$y_1 = 1$

$\frac{d}{dx} y_1 = \frac{d}{dx} 1$

$\frac{dy_1}{dx} = 0$

Sustituyendo, se obtiene:

$0 = (1-x)1^2 + (2x-1)1 - x$

$0 = 1 - x + 2x - 1 - x$

$0 = 2x - 2x$

$0 = 0$

Luego $y_1 = 1$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = 1 + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = 0 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = (1 - x)\left(1 + \frac{1}{v}\right)^2 + (2x - 1)\left(1 + \frac{1}{v}\right) - x$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = (1 - x)\left(1 + 2\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}\right) + 2x + 2x\frac{1}{v} - 1 - \frac{1}{v} - x$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 1 + 2\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - x - 2x\frac{1}{v} - x\frac{1}{v^2} + 2x + 2x\frac{1}{v} - 1 - \frac{1}{v} - x$

$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - x\frac{1}{v^2}$ (*)

Multiplicamos por $-v^2$ la ED (*).

$-v^2\left(-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - x\frac{1}{v^2}\right)$

$\frac{dv}{dx} = -v - 1 + x$

$\frac{dv}{dx} + v = x - 1$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + v + 1 - x = 0$

$dv + (v + 1 - x)dx = 0$ (**)

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$e^x[dv + (v + 1 - x)dx = 0]$

$e^x dv + e^x(v + 1 - x)dx = e^x \cdot 0$

$e^x dv + (ve^x + 1e^x - xe^x)dx = 0$

$e^x dv + ve^x dx + e^x dv - xe^x dx = 0$

$(e^x dv + ve^x dx) + e^x dv - xe^x dx = 0$

$d(ve^x) + d(e^x) - d(xe^x - e^x) = d(C)$

$d[ve^x + e^x - (xe^x - e^x)] = d(C)$

$\int d[ve^x + e^x - (xe^x - e^x)] = \int d(C)$

$ve^x + e^x - (xe^x - e^x) = C$

$ve^x + e^x - xe^x + e^x = C$

$ve^x + 2e^x - xe^x = C$

$ve^x = C + xe^x - 2e^x$

$v = \frac{C + xe^x - 2e^x}{e^x}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = 1 + \frac{1}{v}$, tenemos:

$y = 1 + \frac{1}{\frac{C + xe^x - 2e^x}{e^x}}$

$y = 1 + \frac{e^x}{C + xe^x - 2e^x}$

Luego, la solución de la ED (R_1) es:

Factor integrante.

$f(x) = 1$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1dx}$

$\boldsymbol{P} = e^x$

$$\boldsymbol{y = 1 + \frac{e^x}{C + xe^x - 2e^x}}$$

6. $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$, una solución es $y_1 = \frac{1}{x}$.

Solución:

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$$

Verifiquemos que $y_1 = \frac{1}{x}$ es solución de $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2 \;\; (R_1)$.

Calculemos la primera derivada de y_1.

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} y_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1})$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -x^{-2}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$-\frac{1}{x^2} = -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \cancel{\frac{1}{x^2}}$$

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Luego $y_1 = \frac{1}{x}$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{v}}{x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$-\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{v}}{x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x}\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{v} + \cancel{\frac{1}{x^2}} + 2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{xv} + 2\frac{1}{xv} + \frac{1}{v^2}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{xv} + \frac{1}{v^2} \qquad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ la ED (*).

$$-v^2\left(-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{xv} + \frac{1}{v^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v - 1$$

$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -1$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v + 1 = 0$$

$dv + \left(\frac{1}{x}v + 1\right)dx = 0$ (**)

Multiplicamos **P** en la ecuación (**).

$$x\left[dv + \left(\frac{1}{x}v + 1\right)dx = 0\right]$$

$$xdv + x\left(\frac{1}{x}v + 1\right)dx = x \cdot 0$$

$$xdv + \left(x\frac{1}{x}v + x\right)dx = 0$$

$$xdv + (v + x)dx = 0$$

$$xdv + vdx + xdx = 0$$

$$(xdv + vdx) + xdx = 0$$

$$d(xv) + d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = d(C)$$

$$d\left(xv + \frac{1}{2}x^2\right) = d(C)$$

$$\int d\left(xv + \frac{1}{2}x^2\right) = \int d(C)$$

$$xv + \frac{1}{2}x^2 = C$$

$$xv = C - \frac{1}{2}x^2$$

$v = \frac{C - \frac{1}{2}x^2}{x}$, solución general de la ED (**).

Factor integrante.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln x}$$

$$\boldsymbol{P} = x$$

Reemplazando v en $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$, tenemos.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{C - \frac{1}{2}x^2}{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{x}{C - \frac{1}{2}x^2}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x} + \frac{x}{C - \frac{1}{2}x^2}}$$

7. $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$, una solución es $y_1 = x$.

Solución:

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 - 2xy + y^2$$

Verifiquemos que $y_1 = x$ es solución de $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \ \ (R_1)$.

Calculemos la primera derivada de y_1.

$$y_1 = x$$

$$\frac{d}{dx}y_1 = \frac{d}{dx}x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = 1$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$1 = 1 + x^2 - 2xx + x^2$$

$$1 = 1 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2}$$

$1 = 1$

Luego $y_1 = x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = x + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 1 + x^2 - 2x\left(x + \frac{1}{v}\right) + \left(x + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 1 + x^2 - 2x^2 - 2x\frac{1}{v} + x^2 + 2x\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2} \quad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ la ecuación (*).

$$-v^2\left(-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2}\right)$$

$\frac{dv}{dx} = -1$, ED de variable separable.

$$dv = -dx$$

$$\int dv = -\int dx + C$$

$v = -x + C$, solución general de la ED (*).

Reemplazando v en $y = x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = x + \frac{1}{-x + C}$$

$$y = x + \frac{1}{C - x}$$

$$y = x + (C - x)^{-1}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = x + (C - x)^{-1}}$$

8. $y' + 2y^2 = 2x^2 + \frac{1}{x}y$, una solución es $y_1 = x$.

Solución:

$$y' + 2y^2 = 2x^2 + \frac{1}{x}y$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 2x^2 + \frac{1}{x}y$$

Verifiquemos que $y_1 = x$ es solución de $\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 2x^2 + \frac{1}{x}y \ \ (R_1)$.

Calculamos la primera derivada de y_1.

$$y_1 = x$$

$$\frac{d}{dx}y_1 = \frac{d}{dx}x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = 1$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$1 + 2(x)^2 = 2x^2 + \frac{1}{x}x$$

$$1 + 2x^2 = 2x^2 + 1$$

$1 + 2x^2 = 1 + 2x^2$

Luego $y_1 = x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = x + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + 2\left(x + \frac{1}{v}\right)^2 = 2x^2 + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{v}\right)$$

$$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + 2\left(x^2 + 2x\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}\right) = 2x^2 + \frac{1}{x}x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{v}$$

$$\cancel{1} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + \cancel{2x^2} + 4x\frac{1}{v} + 2\frac{1}{v^2} = \cancel{2x^2} + \cancel{1} + \frac{1}{xv}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + 4x\frac{1}{v} + 2\frac{1}{v^2} = \frac{1}{xv} \quad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$la ecuación (*).

$$-v^2\left(-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + 4x\frac{1}{v} + 2\frac{1}{v^2} = \frac{1}{xv}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} - 4xv - 2 = -\frac{1}{x}v$$

$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v-4xv=2$$

$\frac{dv}{dx}+\left(\frac{1}{x}-4x\right)v=2$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}+\left(\frac{1}{x}-4x\right)v-2=0$$

$$dv+\left[\left(\frac{1}{x}-4x\right)v-2\right]dx=0 \quad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$xe^{-2x^2}\left\{dv+\left[\left(\frac{1}{x}-4x\right)v-2\right]dx=0\right\}$$

$$xe^{-2x^2}dv+xe^{-2x^2}\left[\left(\frac{1}{x}-4x\right)v-2\right]dx=xe^{-2x^2}\cdot 0$$

$$xe^{-2x^2}dv+\left[xe^{-2x^2}\left(\frac{1}{x}-4x\right)v-2xe^{-2x^2}\right]dx=0$$

$$xe^{-2x^2}dv+e^{-2x^2}\left(x\frac{1}{x}-4xx\right)vdx-2xe^{-2x^2}dx=0$$

$$\left[xe^{-2x^2}dv+xe^{-2x^2}(1-4x^2)vdx\right]-2xe^{-2x^2}dx=0$$

$$d\left(vxe^{-2x^2}\right)+d\left(\frac{1}{2}e^{-2x^2}\right)=d(C)$$

$$d\left(vxe^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}\right)=d(C)$$

$$\int d\left(vxe^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}\right)=\int d(C)$$

$$vxe^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}=C$$

$$e^{-2x^2}\left(vx+\frac{1}{2}\right)=C$$

$$\frac{vx+\frac{1}{2}}{e^{2x^2}}=C$$

$$vx+\frac{1}{2}=Ce^{2x^2}$$

Factor integrante.

$$f(x)=\frac{1}{x}-4x$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(\frac{1}{x}-4x\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{x}dx-2\int 2xdx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x-2x^2}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x}e^{-2x^2}$$

$$\boldsymbol{P}=xe^{-2x^2}$$

$$vx = Ce^{2x^2} - \frac{1}{2}$$

$$2\left(vx = Ce^{2x^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$2xv = 2Ce^{2x^2} - 1$$

$$2xv = Ke^{2x^2} - 1\ ; \quad K = 2C$$

$$v = \frac{Ke^{2x^2} - 1}{2x}$$

$v = \frac{Ke^{2x^2}-1}{2x}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = x + \frac{1}{\frac{Ke^{2x^2} - 1}{2x}}$$

$$y = x + \frac{2x}{Ke^{2x^2} - 1}$$

$$y = \frac{x\left(Ke^{2x^2} - 1\right) + 2x}{Ke^{2x^2} - 1}$$

$$y = \frac{Kxe^{2x^2} - x + 2x}{Ke^{2x^2} - 1}$$

$$y = \frac{Kxe^{2x^2} + x}{Ke^{2x^2} - 1}$$

Luego, la solución de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \frac{Kxe^{2x^2} + x}{Ke^{2x^2} - 1}}$$

9. $y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$, una solución es $y_1 = \sin x$.

Solución:

$$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$$

Verifiquemos que $y_1 = \sin x$ es solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x} \quad (R_1)$.

Calculamos la primera derivada de y_1.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\sin x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \cos x$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\cos x = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + (\sin x)^2}{2\cos x}$$

$$\cos x = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x}{2\cos x}$$

$$\cos x = \frac{2\cos^2 x}{2\cos x}$$

$$\cos x = \cos x$$

Luego $y_1 = \sin x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = \sin x + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\sin x + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$\cos x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + \left(\sin x + \frac{1}{v}\right)^2}{2\cos x}$$

$$\cos x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x + \frac{2}{v}\sin x + \frac{1}{v^2}}{2\cos x}$$

$$\cos x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{2\cos^2 x + \frac{2}{v}\sin x + \frac{1}{v^2}}{2\cos x}$$

$$\cos x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{2\cos^2 x}{2\cos x} + \frac{\frac{2}{v}\sin x}{2\cos x} + \frac{\frac{1}{v^2}}{2\cos x}$$

$$\cos x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \cos x + \frac{\sin x}{v\cos x} + \frac{1}{2v^2\cos x}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{\sin x}{v\cos x} + \frac{1}{2v^2\cos x} \quad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ en la ED (*).

$$-v^2\left(-v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{\sin x}{v\cos x} + \frac{1}{2v^2\cos x}\right)$$

$$v^2 \cdot v^{-2}\frac{dv}{dx} = -v^2\frac{\sin x}{v\cos x} - v^2\frac{1}{2v^2\cos x}$$

$$\frac{dv}{dx} = -v\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{2\cos x}$$

$\frac{dv}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x}v = -\frac{1}{2\cos x}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x}v + \frac{1}{2\cos x} = 0$$

$$dv + \left(\frac{\sin x}{\cos x}v + \frac{1}{2\cos x}\right)dx = 0 \quad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$\frac{1}{\cos x}\left[dv + \left(\frac{\sin x}{\cos x}v + \frac{1}{2\cos x}\right)dx\right] = 0 \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x}dv + \frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}v + \frac{1}{2\cos x}\right)dx = 0$$

Factor integrante.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\ln\cos x}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln\cos x}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\cos x}$$

$\frac{1}{\cos x}dv + \frac{v\sin x}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{2\cos^2 x}dx = 0$

$\left(\frac{1}{\cos x}dv + \frac{v\sin x}{\cos^2 x}dx\right) + \frac{\sec^2 x}{2}dx = 0$

$d\left(\frac{v}{\cos x}\right) + d\left(\frac{\tan x}{2}\right) = d(C)$

$d\left(\frac{v}{\cos x} + \frac{\tan x}{2}\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{v}{\cos x} + \frac{\tan x}{2}\right) = \int d(C)$

$\frac{v}{\cos x} + \frac{\tan x}{2} = C$

$\frac{v}{\cos x} = C - \frac{\tan x}{2}$

$v = \cos x\left(C - \frac{\sin x}{2\cos x}\right)$

$v = C\cos x - \frac{\sin x}{2\cos x}\cos x$

$v = C\cos x - \frac{1}{2}\sin x$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = \sin x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$y = \sin x + \frac{1}{C\cos x - \frac{1}{2}\sin x}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \sin x + \left(C\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)^{-1}}$$

10. $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$, una solución es $y_1 = 1$.

Solución:

$y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$

$\frac{dy}{dx} - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$

Verifiquemos que $y_1 = 1$ es solución de $\frac{dy}{dx} - xy^2 + (2x-1)y = x - 1 \quad (R_1)$.

Calculemos la primera derivada de y_1.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = 0$$

Sustituyendo, se sigue:

$$0 - x \cdot 1^2 + (2x-1)1 = x - 1$$

$$-x \cdot 1 + 2x - 1 = x - 1$$

$$-x + 2x - 1 = x - 1$$

$$x - 1 = x - 1$$

Luego $y_1 = 1$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = 1 + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - x\left(1 + \frac{1}{v}\right)^2 + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{v}\right) = x - 1$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - x\left(1 + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^2}\right) + 2x + \frac{2x}{v} - 1 - \frac{1}{v} = x - 1$$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - x - \frac{2x}{v} - \frac{x}{v^2} + 2x + \frac{2x}{v} - 1 - \frac{1}{v} = x - 1$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} + x - 1 - \frac{x}{v^2} - \frac{1}{v} = x - 1$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{x}{v^2} - \frac{1}{v} = x - 1 - x + 1$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{x}{v^2} - \frac{1}{v} = 0$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v} = \frac{x}{v^2} \quad (*)$

Multiplicamos por $-v^2$ la ED (*).

$-v^2\left(-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v}\right) = -v^2\frac{x}{v^2}$

$v^2 \cdot v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}v^2 = -x$

$\frac{dv}{dx} + v = -x$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + v + x = 0$

$dv + (v + x)dx = 0 \quad (**)$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$e^x[dv + (v + x)dx] = 0 \cdot e^x$

$e^x dv + e^x(v + x)dx = 0$

$e^x dv + ve^x dx + xe^x dx = 0$

$d(ve^x) + d(xe^x - e^x) = d(C)$

$\int d(ve^x) + \int d(xe^x - e^x) = \int d(C)$

$ve^x + (xe^x - e^x) = C$

$ve^x = -xe^x + e^x + C$

$v = \frac{xe^x - e^x + C}{e^x}$

Factor integrante.

$f(x) = 1$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1dx}$

$\boldsymbol{P} = e^x$

$v = \frac{-xe^x}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} + \frac{C}{e^x}$

$v = -x + 1 + Ce^{-x}$

$v = 1 - x + Ce^{-x}$, solución general de la ED (**).

Sustituyendo v en $y = 1 + \frac{1}{v}$, tenemos:

$y = 1 + \frac{1}{1 - x + Ce^{-x}}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$\boldsymbol{y = 1 + \frac{1}{1 - x + Ce^{-x}}}$

11. $x(x-1)y' - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$, una solución es $y_1 = x$.

Solución:

$x(x-1)y' - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$

$x(x-1)\frac{dy}{dx} - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$

Verifiquemos que $y_1 = x$ es solución de $x(x-1)\frac{dy}{dx} - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0 \ \ (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}x$

$\frac{dy_1}{dx} = 1$

Sustituyendo, se obtiene:

$x(x-1)1 - (2x+1)x + x^2 + 2x = 0$

$x^2 - x - 2x^2 - x + x^2 + 2x = 0$

$0 = 0$

Luego, $y_1 = x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = x + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = 1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$x(x-1)\left(1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}\right) - (2x+1)\left(x + \frac{1}{v}\right) + \left(x + \frac{1}{v}\right)^2 + 2x = 0$

$(x^2 - x)\left(1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}\right) - \left(2x^2 + \frac{2x}{v} + x + \frac{1}{v}\right) + x^2 + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2} + 2x = 0$

$x^2 - x - (x^2 - x)v^{-2}\frac{dv}{dx} - 2x^2 - \frac{2x}{v} - x - \frac{1}{v} + x^2 + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2} + 2x = 0$

$-(x^2 - x)v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} = 0$

$-\frac{1}{x^2 - x}\left(-(x^2 - x)v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}\right) = 0 \cdot -\frac{1}{x^2 - x}$

$v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v(x^2 - x)} - \frac{1}{v^2(x^2 - x)} = 0 \quad (*)$

Multiplicando por v^2 la ED (*)-

$v^2 v^{-2}\frac{dv}{dx} + v^2\frac{1}{v(x^2 - x)} - v^2\frac{1}{v^2(x^2 - x)} = 0v^2$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x^2 - x}v - \frac{1}{x^2 - x} = 0$$

$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x^2 - x}v = \frac{1}{x^2 - x}$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x^2 - x}v - \frac{1}{x^2 - x} = 0$

$dv + \left(\frac{1}{x^2 - x}v - \frac{1}{x^2 - x}\right)dx = 0 \quad (**)$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$\frac{x-1}{x}\left[dv+\left(\frac{1}{x^2-x}v-\frac{1}{x^2-x}\right)dx\right]=0\cdot\frac{x-1}{x};\quad x\neq 0$

$\frac{x-1}{x}dv+\frac{x-1}{x}\left(\frac{1}{x^2-x}v-\frac{1}{x^2-x}\right)dx=0$

$\frac{x-1}{x}dv+\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x^2-x}vdx-\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x^2-x}dx=0$

$\frac{x-1}{x}dv+\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x(x-1)}vdx-\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x(x-1)}dx=0$

$\frac{x-1}{x}dv+\frac{v}{x^2}dx-\frac{1}{x^2}dx=0$

$d\left[v\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]-d\left(-\frac{1}{x}\right)=d(C)$

$\int d\left[v\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]-\int d\left(-\frac{1}{x}\right)=\int d(C)$

$v\left(\frac{x-1}{x}\right)-\left(-\frac{1}{x}\right)=C$

$v\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x}=C$

$v\left(\frac{x-1}{x}\right)=C-\frac{1}{x}$

$v(x-1)=x\left(C-\frac{1}{x}\right)$

$v(x-1)=Cx-1$

$v=\frac{Cx-1}{x-1}$, solución general de la ED (**).

Sustituyendo v en $y=x+\frac{1}{v}$, tenemos:

$y=x+\frac{1}{\frac{Cx-1}{x-1}}$

$y=x+\frac{x-1}{Cx-1}$

$y=\frac{x(Cx-1)+x-1}{Cx-1}$

$y=\frac{Cx^2-x+x-1}{Cx-1}$

Factor integrante.

$f(x)=\frac{1}{x^2-x}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{x^2-x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{x(x-1)}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{x-x+1}{x(x-1)}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(\frac{x}{x(x-1)}-\frac{x-1}{x(x-1)}\right)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\ln(x-1)-\ln x}$

$\boldsymbol{P}=e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$

$\boldsymbol{P}=\frac{x-1}{x}$

$$y = \frac{Cx^2 - 1}{Cx - 1}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \frac{Cx^2 - 1}{Cx - 1}}$$

12. $y' + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$, una solución es $y_1 = \frac{1}{\cos x}$.

Solución:

$$y' + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

Verifiquemos que $y_1 = \frac{1}{\cos x}$ es solución de $\frac{dy}{dx} + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \quad (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$$y_1 = \frac{1}{\cos x}$$

$$y_1 = \sec x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx} \sec x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \sec x \tan x$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\sec x \tan x + (\sec x)^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \sec^2 x \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$\frac{2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

Luego, $y_1 = \frac{1}{\cos x}$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{v}$

$y = \sec x + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(\sec x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$\sec x \tan x - v^{-2}\frac{dv}{dx} + \left(\sec x + \frac{1}{v}\right)^2 \sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

$\sec x \tan x - v^{-2}\frac{dv}{dx} + \left(\sec^2 x + \frac{2\sec x}{v} + \frac{1}{v^2}\right)\sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - v^{-2}\frac{dv}{dx} + \sec^2 x \sin x + \frac{2\sec x \sin x}{v} + \frac{\sin x}{v^2} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{2\sec x\sin x}{v} + \frac{\sin x}{v^2} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

$2\frac{\sin x}{\cos^2 x} - v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{2\sec x\sin x}{v} + \frac{\sin x}{v^2} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{2\sec x\sin x}{v} + \frac{\sin x}{v^2} = 0 \quad (*)$

Multiplicamos por $-v^2$la ED (*).

$-v^2\left(-v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{2\sec x\sin x}{v} + \frac{\sin x}{v^2}\right) = 0\cdot -v^2$

$v^2 v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{2\sec x\sin x}{v}v^2 - \frac{\sin x}{v^2}v^2 = 0$

$\frac{dv}{dx} - (2\sec x \sin x)v - \sin x = 0$

$\frac{dv}{dx} - (2\sec x \sin x)v = \sin x$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} - (2\sec x \sin x)v - \sin x = 0$

$\frac{dv}{dx} - 2v\sec x \sin x - \sin x = 0$

$dv + (-2v\sec x \sin x - \sin x)dx = 0 \quad (**)$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$(\cos x)^2[dv + (-2v\sec x \sin x - \sin x)dx] = 0 \cdot (\cos x)^2$

$(\cos x)^2 dv + (\cos x)^2(-2v\sec x \sin x - \sin x)dx = 0$

$(\cos x)^2 dv - 2v(\cos x)^2 \sec x \sin x\, dx - (\cos x)^2 \sin x\, dx = 0$

$(\cos x)^2 dv - \frac{2v(\cos x)^2 \sin x}{\cos x}dx - \sin x\,(\cos x)^2 dx = 0$

$(\cos x)^2 dv - 2v \sin x \cos x\, dx - \sin x\,(\cos x)^2 dx = 0$

$d[v(\cos x)^2] + d\left[\frac{1}{3}(\cos x)^3\right] = d(C)$

$\int d[v(\cos x)^2] + \int d\left[\frac{1}{3}(\cos x)^3\right] = \int d(C)$

$v(\cos x)^2 + \frac{1}{3}(\cos x)^3 = C$

$v\cos^2 x = C - \frac{1}{3}\cos^3 x$

$v = \frac{C - \frac{1}{3}\cos^3 x}{\cos^2 x}$

$v = \frac{3C - \cos^3 x}{3\cos^2 x}$

$v = \frac{K - \cos^3 x}{3\cos^2 x}; \qquad K = 3C$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{v}$, tenemos:

Factor integrante.

$f(x) = -2\sec x \sin x$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int(-2\sec x \sin x d)x}$

$\boldsymbol{P} = e^{2\int\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{2\ln\cos x}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(\cos x)^2}$

$\boldsymbol{P} = (\cos x)^2$

$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\frac{K - \cos^3 x}{3\cos^2 x}}$

$y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{K - \cos^3 x}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{K - \cos^3 x}}$$

13. $y' + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0$, una solución es $y_1 = e^x$.

Solución:

$y' + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0$

$\frac{dy}{dx} + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0$

Verifiquemos que $y_1 = e^x$ es solución de $\frac{dy}{dx} + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0 \quad (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx} e^x$

$\frac{dy_1}{dx} = e^x$

Sustituyendo, se obtiene:

$e^x + (e^x)^2 - (1 + 2e^x)e^x + e^{2x} = 0$

$e^x + e^{2x} - e^x - 2e^{2x} + e^{2x} = 0$

$0 = 0$

Luego, $y_1 = e^x$ es solución de R_1.

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = e^x + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(e^x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = e^x - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$e^x - v^{-2}\frac{dv}{dx} + \left(e^x + \frac{1}{v}\right)^2 - (1 + 2e^x)\left(e^x + \frac{1}{v}\right) + e^{2x} = 0$

$e^x - v^{-2}\frac{dv}{dx} + e^{2x} + \frac{2e^x}{v} + \frac{1}{v^2} - \left(e^x + \frac{1}{v} + 2e^{2x} + \frac{2e^x}{v}\right) + e^{2x} = 0$

$e^x - v^{-2}\frac{dv}{dx} + e^{2x} + \frac{2e^x}{v} + \frac{1}{v^2} - e^x - \frac{1}{v} - 2e^{2x} - \frac{2e^x}{v} + e^{2x} = 0$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v} = 0$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v} = -\frac{1}{v^2} \quad (*)$

Multiplicamos por $-v^2$ la ED (*).

$-v^2\left(-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v}\right) = -v^2 \cdot -\frac{1}{v^2}$

$v^2v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}v^2 = 1$

$\frac{dv}{dx} + v = 1$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + v - 1 = 0$

$dv + (v-1)dx = 0 \quad (**)$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$e^x[dv + (v-1)dx] = 0 \cdot e^x$

$e^x dv + e^x(v-1)dx = 0$

$e^x dv + ve^x dx - e^x dx = 0$

Factor integrante.

$f(x) = 1$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int 1dx}$

$\boldsymbol{P} = e^x$

$d(ve^x) - d(e^x) = d(C)$

$d(ve^x - e^x) = d(C)$

$\int d(ve^x - e^x) = \int d(C)$

$ve^x - e^x = C$

$ve^x = e^x + C$

$v = \frac{e^x + C}{e^x}$

$v = \frac{e^x}{e^x} + \frac{C}{e^x}$

$v = 1 + Ce^{-x}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = e^x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$y = e^x + \frac{1}{1+Ce^{-x}}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = e^x + \frac{1}{1 + Ce^{-x}}}$$

14. $y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$, una solución es $y_1 = \frac{2}{x}$.

Solución:

$y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$

Verifiquemos que $y_1 = \frac{2}{x}$ es solución de $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2 \quad (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)$

$$\frac{dy_1}{dx} = 2\frac{d}{dx}(x^{-1})$$

$$\frac{dy_1}{dx} = 2(-x^{-2})$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{2}{x^2}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-\frac{2}{x^2} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

$$-\frac{2}{x^2} = -\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^2}$$

$$-\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

Luego, $y_1 = \frac{2}{x}$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^{-1}) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$-\frac{2}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{v}\right) + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$-\cancel{\frac{2}{x^2}} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\cancel{\frac{4}{x^2}} - \cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{1}{vx} + \cancel{\frac{4}{x^2}} + \frac{4}{vx} + \frac{1}{v^2}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{3}{vx} + \frac{1}{v^2} \quad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ en la ED (*).

$-v^2 \cdot -v^{-2}\frac{dv}{dx} = -v^2\left(\frac{3}{vx}+\frac{1}{v^2}\right)$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x} - 1$

$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = -1$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v + 1 = 0$

$dv + \left(\frac{3v}{x}+1\right)dx = 0 \quad (**)$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$x^3\left[dv + \left(\frac{3v}{x}+1\right)dx\right] = 0 \cdot x^3$

$x^3 dv + x^3\left(\frac{3v}{x}+1\right)dx = 0$

$x^3 dv + 3vx^2 dx + x^3 dx = 0$

$d(vx^3) + d\left(\frac{1}{4}x^4\right) = d(C)$

$\int d(vx^3) + \int d\left(\frac{1}{4}x^4\right) = \int d(C)$

$$vx^3 + \frac{1}{4}x^4 = C$$

$$vx^3 = C - \frac{1}{4}x^4$$

$$vx^3 = \frac{4C - x^4}{4}$$

$v = \frac{K-x^4}{4x^3}$; $\quad K = 4C$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{v}$, tenemos:

$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{K-x^4}{4x^3}}$

Factor integrante.

$f(x) = \frac{3}{x}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{3}{x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{3\int \frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{3\ln x}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln x^3}$

$\boldsymbol{P} = x^3$

$y = \frac{2}{x} + \frac{4x^3}{K-x^4}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{x} + \frac{4x^3}{K - x^4}}$$

15. $y' + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1$, una solución es $y_1 = x - 1$.

Solución:

$y' + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1$

$\frac{dy}{dx} + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1$

Verifiquemos que $y_1 = x - 1$ es solución de $\frac{dy}{dx} + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1 \;\; (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(x - 1)$

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1)$

$\frac{dy_1}{dx} = 1 - 0$

$\frac{dy_1}{dx} = 1$

Sustituyendo, se obtiene:

$1 + x(x-1)^2 - 2x^2(x-1) + x^3 = x + 1$

$1 + x(x^2 - 2x + 1) - 2x^3 + 2x^2 + x^3 = x + 1$

$1 + x^3 - 2x^2 + x - 2x^3 + 2x^2 + x^3 = x + 1$

$1 + x = x + 1$

$x + 1 = x + 1$

Luego, $y_1 = x - 1$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = x - 1 + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(x - 1 + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = 1 - 0 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$1 - v^{-2}\frac{dv}{dx} + x\left(x - 1 + \frac{1}{v}\right)^2 - 2x^2\left(x - 1 + \frac{1}{v}\right) + x^3 = x + 1$

$1 - v^{-2}\frac{dv}{dx} + x\left[x^2 + 1 + \frac{1}{v^2} + 2(x)(-1) + 2(x)\left(\frac{1}{v}\right) + 2(-1)\left(\frac{1}{v}\right)\right] - 2x^2\left(x - 1 + \frac{1}{v}\right) + x^3 = x + 1$

$1 - v^{-2}\frac{dv}{dx} + x\left[x^2 + 1 + \frac{1}{v^2} - 2x + \frac{2x}{v} - \frac{2}{v}\right] - 2x^3 + 2x^2 - \frac{2x^2}{v} + x^3 = x + 1$

$\cancel{1} - v^{-2}\frac{dv}{dx} + \cancel{x^3} + \cancel{x} + \frac{x}{v^2} - \cancel{2x^2} + \cancel{\frac{2x^2}{v}} - \frac{2x}{v} - \cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} - \cancel{\frac{2x^2}{v}} + \cancel{x^3} = \cancel{x} + \cancel{1}$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{v} + \frac{x}{v^2} = 0$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{v} = -\frac{x}{v^2} \quad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ la ED (*).

$$-v^2\left(-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{v}\right) = -v^2 \cdot -\frac{x}{v^2}$$

$$v^2 v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{v}v^2 = x$$

$\frac{dv}{dx} + 2xv = x$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx}+2xv-x=0$$

Factor integrante.

$F(x)=2x$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int 2xdx}$

$\boldsymbol{P}=e^{x^2}$

$$dv+(2xv-x)dx=0 \quad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$e^{x^2}[dv+(2xv-x)dx]=0\cdot e^{x^2}$$

$$e^{x^2}dv+e^{x^2}(2xv-x)dx=0$$

$$e^{x^2}dv+2vxe^{x^2}dx-xe^{x^2}dx=0$$

$$d\left(ve^{x^2}\right)-d\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)=d(C)$$

$$\int d\left(ve^{x^2}\right)-\int d\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)=\int d(C)$$

$$ve^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}=C$$

$$ve^{x^2}=C+\frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$ve^{x^2}=\frac{2C+e^{x^2}}{2}$$

$v=\frac{K+e^{x^2}}{2e^{x^2}}$; $\quad K=2C$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y=x-1+\frac{1}{v}$, tenemos:

$$y=x-1+\frac{1}{\frac{K+e^{x^2}}{2e^{x^2}}}$$

$$y=x-1+\frac{2e^{x^2}}{K+e^{x^2}}$$

Luego, la solución de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y=x-1+\frac{2e^{x^2}}{K+e^{x^2}}}$$

16. $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, una solución es $y_1 = x$.

Solución:

$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$

Verifiquemos que $y_1 = x$ es solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5 \quad (R_1)$.

Calculando la primera derivada de y_1.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}x$

$\frac{dy_1}{dx} = 1$

Sustituyendo, se obtiene:

$$1 = \frac{x}{x} + x^3x^2 - x^5$$

$1 = 1 + x^5 - x^5$

$1 = 1$

Luego, $y_1 = x$ es una solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = x + \frac{1}{v}$$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = 1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$1 - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{x + \frac{1}{v}}{x} + x^3\left(x + \frac{1}{v}\right)^2 - x^5$$

$$1 - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x} + \frac{\frac{1}{v}}{x} + x^3\left(x^2 + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2}\right) - x^5$$

$$\cancel{1} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \cancel{1} + \frac{1}{vx} + \cancel{x^5} + \frac{2x^4}{v} + \frac{x^3}{v^2} - \cancel{x^5}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) + \frac{x^3}{v^2}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) = \frac{x^3}{v^2} \quad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ en la ED (*).

$$-v^2\left[-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)\right] = -v^2 \cdot \frac{x^3}{v^2}$$

$$v^2v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)v^2 = -x^3$$

$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)v = -x^3$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)v + x^3 = 0$$

$$dv + \left[\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)v + x^3\right]dx = 0 \quad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$xe^{\frac{2}{5}x^5}\left\{dv + \left[\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)v + x^3\right]dx\right\} = 0 \cdot xe^{\frac{2}{5}x^5}$$

$$xe^{\frac{2}{5}x^5}dv + xe^{\frac{2}{5}x^5}\left[\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)v + x^3\right]dx = 0$$

$$xe^{\frac{2}{5}x^5}dv + \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)vxe^{\frac{2}{5}x^5}dx + x^4e^{\frac{2}{5}x^5}dx = 0$$

Factor integrante.

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x^4$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{x}dx + \int 2x^4dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln x + \frac{2}{5}x^5}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln x}e^{\frac{2}{5}x^5}$$

$$\boldsymbol{P} = xe^{\frac{2}{5}x^5}$$

$$xe^{\frac{2}{5}x^5}dv + (1 + 2x^5)ve^{\frac{2}{5}x^5}dx + x^4e^{\frac{2}{5}x^5}dx = 0$$

$$d\left(vxe^{\frac{2}{5}x^5}\right) + d\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{5}x^5}\right) = d(C)$$

$$\int d\left(vxe^{\frac{2}{5}x^5}\right) + \int d\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{5}x^5}\right) = \int d(C)$$

$$vxe^{\frac{2}{5}x^5} + \frac{1}{2}e^{\frac{2}{5}x^5} = C$$

$$vxe^{\frac{2}{5}x^5} = C - \frac{1}{2}e^{\frac{2}{5}x^5}$$

$$vxe^{\frac{2}{5}x^5} = \frac{2C - e^{\frac{2}{5}x^5}}{2}$$

$v = \frac{K - e^{\frac{2}{5}x^5}}{2xe^{\frac{2}{5}x^5}}$; $\quad K = 2C$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = x + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = x + \frac{1}{\frac{K - e^{\frac{2}{5}x^5}}{2xe^{\frac{2}{5}x^5}}}$$

$$y = x + \frac{2xe^{\frac{2}{5}x^5}}{K - e^{\frac{2}{5}x^5}}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = x + \frac{2xe^{\frac{2}{5}x^5}}{K - e^{\frac{2}{5}x^5}}}$$

17. $y' = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2$, una solución es $y_1 = \tan x$.

Solución:

$y' = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2$

Verifiquemos que $y_1 = \tan x$ es solución de $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2 \quad (R_1)$.

Calculando la derivada de y_1.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\tan x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \sec^2 x$$

Sustituyendo, se obtiene:

$\sec^2 x = \sec^2 x - (\tan x)\tan x + (\tan x)^2$

$\sec^2 x = \sec^2 x - \tan^2 x + \tan^2 x$

$\sec^2 x = \sec^2 x$

Luego, $y_1 = \tan x$ es solución (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = \tan x + \frac{1}{v}$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\tan x + \frac{1}{v}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$\sec^2 x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \sec^2 x - (\tan x)\left(\tan x + \frac{1}{v}\right) + \left(\tan x + \frac{1}{v}\right)^2$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\tan^2 x - \frac{\tan x}{v} + \tan^2 x + \frac{2\tan x}{v} + \frac{1}{v^2}$

$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{\tan x}{v} + \frac{1}{v^2} \quad (*)$

Multiplicamos por $-v^2$ en la ED (*).

$$-v^2 \cdot -v^{-2}\frac{dv}{dx} = -v^2\left(\frac{\tan x}{v} + \frac{1}{v^2}\right)$$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{\tan x}{v}v^2 - \frac{1}{v^2}v^2$

$\frac{dv}{dx} = -(\tan x)v - 1$

$\frac{dv}{dx} + (\tan x)v = -1$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} + (\tan x)v + 1 = 0$

$dv + (v\tan x + 1)dx = 0 \quad (**)$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$\sec x\,[dv + (v\tan x + 1)dx] = 0 \cdot \sec x$

$\sec x\,dv + \sec x\,(v\tan x + 1)dx = 0$

$\sec x\,dv + v\sec x\tan x\,dx + \sec x\,dx = 0$

$d(v\sec x) + d[\ln(\sec x + \tan x)] = d(C)$

$\int d(v\sec x) + \int d[\ln(\sec x + \tan x)] = \int d(C)$

$v\sec x + \ln(\sec x + \tan x) = C$

$v\sec x = C - \ln(\sec x + \tan x)$

$v = \frac{C - \ln(\sec x + \tan x)}{\sec x}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = \tan x + \frac{1}{v}$, tenemos:

Factor integrante.

$f(x) = \tan x$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \tan x dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln\cos x}$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln\cos x}}$$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\cos x}$

$\boldsymbol{P} = \sec x$

$y = \tan x + \frac{1}{\frac{C - \ln(\sec x + \tan x)}{\sec x}}$

$y = \tan x + \frac{\sec x}{C - \ln(\sec x + \tan x)}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \tan x + \frac{\sec x}{C - \ln(\sec x + \tan x)}}$$

18. $x^3y' = x^2y + y^2 - x^2$, una solución es $y_1 = x$.

Solución:

$x^3y' = x^2y + y^2 - x^2$

$x^3\frac{dy}{dx} = x^2y + y^2 - x^2$

Verifiquemos que $y_1 = x$ es solución de $x^3\frac{dy}{dx} = x^2y + y^2 - x^2 \qquad (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}x$

$\frac{dy_1}{dx} = 1$

Sustituyendo, se obtiene:

$x^3 \cdot 1 = x^2x + x^2 - x^2$

$x^3 = x^3$

Luego, $y_1 = x$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$y = x + \frac{1}{v}$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$x^3\left(1 - v^{-2}\frac{dv}{dx}\right) = x^2\left(x + \frac{1}{v}\right) + \left(x + \frac{1}{v}\right)^2 - x^2$$

$$\cancel{x^3} - x^3v^{-2}\frac{dv}{dx} = \cancel{x^3} + \frac{x^2}{v} + \cancel{x^2} + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2} - \cancel{x^2}$$

$$-x^3v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{v} + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2}$$

$$-\frac{1}{x^3}\cdot -x^3v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^2}{v} + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2}\right)$$

$$v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{x^2}{v}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{2x}{v}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{vx} - \frac{2}{vx^2} - \frac{1}{v^2x^3}$$

$$v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{v^2x^3}$$

$$v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = -\frac{1}{v^2x^3} \quad (*)$$

Multiplicamos por v^2 la ED (*).

$$v^2\left[v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right] = -\frac{1}{v^2x^3}v^2$$

$$v^2v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)v^2 = -\frac{1}{x^3}$$

$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)v = -\frac{1}{x^3}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)v + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$dv + \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)v + \frac{1}{x^3}\right]dx = 0 \quad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$xe^{-\frac{2}{x}}\left\{dv+\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)v+\frac{1}{x^3}\right]dx\right\}=0\cdot xe^{-\frac{2}{x}}$$

$$xe^{-\frac{2}{x}}dv+xe^{-\frac{2}{x}}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)v+\frac{1}{x^3}\right]dx=0$$

$$xe^{-\frac{2}{x}}dv+xe^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)vdx+\frac{1}{x^3}xe^{-\frac{2}{x}}dx=0$$

$$xe^{-\frac{2}{x}}dv+e^{-\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)vdx+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}dx=0$$

$$d\left(vxe^{-\frac{2}{x}}\right)+d\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}\right)=d(C)$$

$$\int d\left(vxe^{-\frac{2}{x}}\right)+\int d\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}\right)=\int d(C)$$

$$vxe^{-\frac{2}{x}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}=C$$

$$vxe^{-\frac{2}{x}}=C-\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}$$

$$vxe^{-\frac{2}{x}}=\frac{2C-e^{-\frac{2}{x}}}{2}$$

$$v=\frac{K-e^{-\frac{2}{x}}}{2xe^{-\frac{2}{x}}};\quad K=2C$$

$$v=\frac{e^{\frac{2}{x}}\left(K-e^{-\frac{2}{x}}\right)}{2x}$$

$$v=\frac{Ke^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{2}{x}}e^{-\frac{2}{x}}}{2x}$$

$v=\frac{Ke^{\frac{2}{x}}-1}{2x}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y=x+\frac{1}{v}$, tenemos:

$$y=x+\frac{1}{\frac{Ke^{\frac{2}{x}}-1}{2x}}$$

Factor integrante.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x^2}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x+2\int x^{-2}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x-2x^{-1}}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x-\frac{2}{x}}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x}e^{-\frac{2}{x}}$$

$$\boldsymbol{P}=xe^{-\frac{2}{x}}$$

$y = x + \frac{2x}{Ke^{\frac{2}{x}} - 1}$

$y = \frac{x\left(Ke^{\frac{2}{x}} - 1\right) + 2x}{Ke^{\frac{2}{x}} - 1}$

$y = \frac{Kxe^{\frac{2}{x}} - x + 2x}{Ke^{\frac{2}{x}} - 1}$

$y = \frac{Kxe^{\frac{2}{x}} + x}{Ke^{\frac{2}{x}} - 1}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = \frac{Kxe^{\frac{2}{x}} + x}{Ke^{\frac{2}{x}} - 1}}$$

19. $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$, una solución es $y_1 = -\frac{1}{x}$.

Solución:

$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$

Verifiquemos que $y_1 = -\frac{1}{x}$ es solución de $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$ $\quad (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right)$

$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{d}{dx}x^{-1}$

$\frac{dy_1}{dx} = - \cdot -x^{-2}$

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x^2}$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x}}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

Luego, $y_1 = -\frac{1}{x}$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = - \cdot -x^{-2} - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$\frac{1}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x} + \frac{1}{v}}{x} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$\frac{1}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \left(\frac{-\frac{1}{x}}{x} + \frac{\frac{1}{v}}{x}\right) + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{vx} + \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{1}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\left(-\frac{1}{xx} + \frac{1}{vx}\right) - \frac{2}{vx} + \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{1}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{vx}\right) - \frac{2}{vx} + \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{1}{x^2} - v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{vx} - \frac{2}{vx} + \frac{1}{v^2}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{vx} - \frac{2}{vx} + \frac{1}{v^2}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = -\frac{3}{vx} + \frac{1}{v^2}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{3}{vx} = \frac{1}{v^2} \qquad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ la ED (*).

$$-v^2\left(-v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{3}{vx}\right) = -v^2\frac{1}{v^2}$$

$$v^2v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{3}{vx}v^2 = -1$$

$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = -1$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v + 1 = 0$$

$$dv + \left(-\frac{3}{x}v + 1\right)dx = 0 \qquad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$\frac{1}{x^3}\left[dv + \left(-\frac{3}{x}v + 1\right)dx\right] = 0 \cdot \frac{1}{x^3}; \qquad x^3 \neq 0$$

$$\frac{1}{x^3}dv + \frac{1}{x^3}\left(-\frac{3}{x}v + 1\right)dx = 0$$

$$\frac{1}{x^3}dv - \frac{3v}{x^4}dx + \frac{1}{x^3}dx = 0$$

$$d\left(\frac{v}{x^3}\right) + d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = d(C)$$

$$\int d\left(\frac{v}{x^3}\right) + \int d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = \int d(C)$$

Factor integrante.

$$f(x) =. -\frac{3}{x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{3}{x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-3\int\frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-3\ln x}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln x^{-3}}$$

$$\boldsymbol{P} = x^{-3}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x^3}$$

$\frac{v}{x^3} - \frac{1}{2x^2} = C$

$\frac{v}{x^3} = C + \frac{1}{2x^2}$

$\frac{v}{x^3} = \frac{2Cx^2+1}{2x^2}$

$v = x^3\left(\frac{2Cx^2+1}{2x^2}\right)$

$v = \frac{x(Kx^2+1)}{2}$; $K = 2C$

$v = \frac{Kx^3+x}{2}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{v}$, tenemos:

$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{Kx^3+x}{2}}$

$y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{Kx^3+x}$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{Kx^3 + x}}$$

20. $y' = 2x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{2x}y^2$, una solución es $y_1 = -2x^2$.

Solución:

$y' = 2x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{2x}y^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{2x}y^2$

Verifiquemos que $y_1 = -2x^2$ es solución de $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{2x}y^2 \quad (R_1)$.

Calculemos la derivada de y_1.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(-2x^2)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -2\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -2(2x)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -4x$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$-4x = 2x^3 + \frac{2}{x}(-2x^2) - \frac{1}{2x}(-2x^2)^2$$

$$-4x = 2x^3 - 4x - \frac{1}{2x} \cdot 4x^4$$

$$-4x = 2x^3 - 4x - 2x^3$$

$$-4x = -4x$$

Luego, $y_1 = -2x^2$ es solución de (R_1).

Consideremos la sustitución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$y = -2x^2 + \frac{1}{v}$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(-2x^2 + \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(v^{-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = -2(2x) - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -4x - v^{-2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en (R_1), se sigue:

$$-4x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = 2x^3 + \frac{2}{x}\left(-2x^2 + \frac{1}{v}\right) - \frac{1}{2x}\left(-2x^2 + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$-4x - v^{-2}\frac{dv}{dx} = 2x^3 - 4x + \frac{2}{vx} - \frac{1}{2x}\left(4x^4 - \frac{4x^2}{v} + \frac{1}{v^2}\right)$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = 2x^3 + \frac{2}{vx} - 2x^3 + \frac{2x}{v} - \frac{1}{2v^2x}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{2}{vx} + \frac{2x}{v} - \frac{1}{2v^2x}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\left(\frac{2}{x} + 2x\right) - \frac{1}{2v^2x}$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v}\left(\frac{2}{x} + 2x\right) = -\frac{1}{2v^2x} \quad (*)$$

Multiplicamos por $-v^2$ la ED (*).

$$-v^2\left[-v^{-2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v}\left(\frac{2}{x} + 2x\right)\right] = -v^2 \cdot -\frac{1}{2v^2x}$$

$$v^2v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}\left(\frac{2}{x} + 2x\right)v^2 = \frac{1}{2x}$$

$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)v = \frac{1}{2x}$, la ED es lineal en v.

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)v - \frac{1}{2x} = 0$$

$$dv + \left[\left(\frac{2}{x} + 2x\right)v - \frac{1}{2x}\right]dx = 0 \quad (**)$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$x^2e^{x^2}\left\{dv + \left[\left(\frac{2}{x} + 2x\right)v - \frac{1}{2x}\right]dx\right\} = 0 \cdot x^2e^{x^2}$$

$$x^2e^{x^2}dv + x^2e^{x^2}\left[\left(\frac{2}{x} + 2x\right)v - \frac{1}{2x}\right]dx = 0$$

$$x^2e^{x^2}dv + e^{x^2}(2x + 2x^3)v\,dx - \frac{x}{2}e^{x^2}dx = 0$$

Factor integrante.

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2x$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(\frac{2}{x}+2x\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{2\int\frac{1}{x}dx + \int 2x\,dx}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{2\ln x + x^2}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln x^2 + x^2}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln x^2}e^{x^2}$$

$$\boldsymbol{P} = x^2e^{x^2}$$

$$d\left(vx^2e^{x^2}\right) - d\left(\frac{1}{4}e^{x^2}\right) = d(C)$$

$$\int d\left(vx^2e^{x^2}\right) - \int d\left(\frac{1}{4}e^{x^2}\right) = \int d(C)$$

$$vx^2e^{x^2} - \frac{1}{4}e^{x^2} = C$$

$$vx^2e^{x^2} = C + \frac{1}{4}e^{x^2}$$

$$vx^2e^{x^2} = \frac{4C + e^{x^2}}{4}$$

$$vx^2e^{x^2} = \frac{K + e^{x^2}}{4}; \qquad K = 4C$$

$v = \frac{K+e^{x^2}}{4x^2e^{x^2}}$, solución general de la ED (**).

Reemplazando v en $y = -2x^2 + \frac{1}{v}$, tenemos:

$$y = -2x^2 + \frac{1}{\frac{K + e^{x^2}}{4x^2e^{x^2}}}$$

$$y = -2x^2 + \frac{4x^2e^{x^2}}{K + e^{x^2}}$$

Luego, la solución general de la ED (R_1) es:

$$\boldsymbol{y = -2x^2 + \frac{4x^2e^{x^2}}{K + e^{x^2}}}$$

3.11 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias

3.11.1 Trayectorias ortogonales

• Obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dadas.

1. $x^2 - xy + y^2 = C$

Solución:

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$x^2 - xy + y^2 = C$

$(x^2 - xy + y^2)' = (C)'$

Derivando implícitamente la curva dada con respecto a x.

$(x^2)' - (xy)' + (y^2)' = 0$

$2x - [(x)'y + x(y)'] + 2yy' = 0$

$2x - [y + xy'] + 2yy' = 0$

$2x - y - xy' + 2yy' = 0$

$2yy' - xy' = y - 2x$

$y'(2y - x) = y - 2x$

$y' = \frac{y-2x}{2y-x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonales.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y-2x}{2y-x}}$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y-x}{y-2x}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal) (*)

Observamos que la ED (*) no es posible trabajarlo por variable separable.

Verificamos si la ED (*) es homogénea.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y-x}{y-2x}$$

$$(y-2x)dy = -(2y-x)dx$$

$$(2y-x)dx + (y-2x)dy = 0$$

Sea:

$M(x,y) = 2y - x$ $\qquad$ $N(x,y) = y - 2x$

$M(xt,yt) = 2yt - xt$ $\qquad$ $N(xt,yt) = yt - 2xt$

$M(xt,yt) = t(2y - x)$ $\qquad$ $N(xt,yt) = t(y - 2x)$

$M(xt,yt) = tM(x,y)$ $\qquad$ $N(xt,yt) = tN(x,y)$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son del mismo grado 1.

Consideremos la sustitución $y = vx \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv$.

$$(2xv - x)dx + (xv - 2x)(vdx + xdv) = 0$$

$$x(2v-1)dx + x(v-2)(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{1}{x}[x(2v-1)dx + x(v-2)(vdx + xdv)] = \frac{1}{x}\cdot 0\ ;\ \ x \neq 0$$

$$\frac{x(2v-1)dx}{x} + \frac{x(v-2)(vdx+xdv)}{x} = 0$$

$$(2v-1)dx + (v-2)(vdx + xdv) = 0$$

$$(2v-1)dx + v(v-2)dx + x(v-2)dv = 0$$

$$[2v - 1 + v(v-2)]dx + x(v-2)dv = 0$$

$$[2v - 1 + v^2 - 2v]dx + x(v-2)dv = 0$$

$$(v^2-1)dx + x(v-2)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v-2}{v^2-1}dv = 0$$

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v-2}{v^2-1} dv = C$, donde C es la constante de integración.

$\ln x + I = C$

$\ln x + \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{v+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{v-1} \right) dv = C$

$\ln x + \frac{3}{2} \int \frac{1}{v+1} dv - \frac{1}{2} \int \frac{1}{v-1} dv = C$

$\ln x + \frac{3}{2} \ln(v+1) - \frac{1}{2} \ln(v-1) = C$

$\ln x + \frac{1}{2} \ln(v+1)^3 - \frac{1}{2} \ln(v-1) = C$

$\ln x + \frac{1}{2} [\ln(v+1)^3 - \ln(v-1)] = C$

$\ln x + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(v+1)^3}{v-1} \right] = C$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(\frac{y}{x} + 1 \right)^3}{\frac{y}{x} - 1} \right] = C$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(\frac{y+x}{x} \right)^3}{\frac{y-x}{x}} \right] = C$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\frac{(y+x)^3}{x^3}}{\frac{y-x}{x}} \right] = C$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(y+x)^3}{x^3} \cdot \frac{x}{y-x} \right] = C$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(y+x)^3}{y-x} \right] = C$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln \left[x^{-2} \cdot \frac{(y+x)^3}{y-x} \right] = C$$

Sea: $I = \int \frac{v-2}{v^2-1} dv$

Resolviendo por fracciones parciales.

$I = \int \frac{v-2}{v^2-1} dv$

$I = \int \frac{v-2}{(v+1)(v-1)} dv$

$I = \int \left(\frac{A}{v+1} + \frac{B}{v-1} \right) dx$

$\frac{v-2}{(v+1)(v-1)} = \frac{A}{v+1} + \frac{B}{v-1}$

$v - 2 = A(v-1) + B(v+1)$

$v - 2 = Av - A + Bv + B$

$v - 2 = (A+B)v - A + B$

$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + B = -2 \end{cases}$ $\quad A + B = 1$

$2B = -1 \quad A = 1 - B$

$B = -\frac{1}{2} \quad A = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)$

$A = 1 + \frac{1}{2}$

$A = \frac{3}{2}$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln x^{-2} + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(y+x)^3}{y-x}\right] = C$$

$$\ln x + \frac{1}{2}(-2\ln x) + \ln\left[\frac{(y+x)^3}{y-x}\right]^{\frac{1}{2}} = C$$

$$\ln x - \ln x + \ln\left[\frac{(y+x)^3}{y-x}\right]^{\frac{1}{2}} = C$$

$$\ln\left[\frac{(y+x)^3}{y-x}\right]^{\frac{1}{2}} = C$$

$$e^{\ln\left[\frac{(y+x)^3}{y-x}\right]^{\frac{1}{2}}} = e^C$$

$$\left[\frac{(y+x)^3}{y-x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^C$$

$$\left\{\left[\frac{(y+x)^3}{y-x}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 = (e^C)^2$$

$$\frac{(y+x)^3}{y-x} = e^{2C}$$

$$(y+x)^3 = e^{2C}(y-x)$$

$$\frac{1}{e^{2C}}(y+x)^3 = y-x$$

$$y-x = \frac{1}{e^{2C}}(y+x)^3$$

$y - x = K(y+x)^3$, donde $K = \frac{1}{e^{2C}}$.

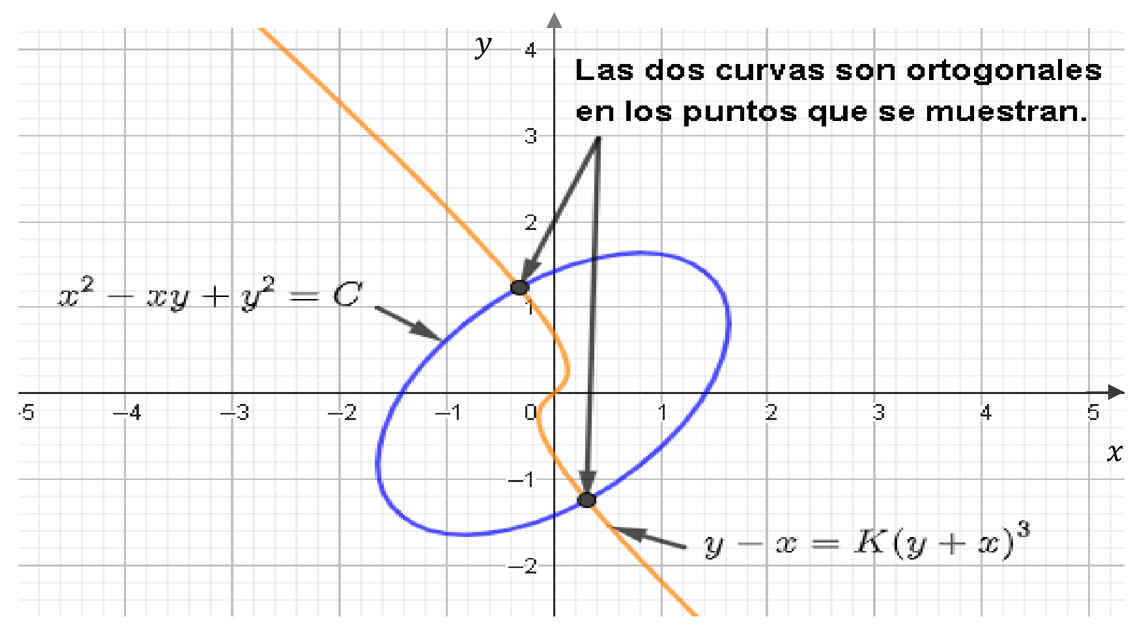
Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$$\boldsymbol{y - x = K(y+x)^3}$$

Figura 4



Miembro de cada familia de curva cuando K=2 y C=2.



Nota. Elaboración propia.

2. $x^2 = y^2 + Ky^3$

Solución:

Despejamos el parámetro K, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$x^2 = y^2 + Ky^3$

$x^2 - y^2 = Ky^3$

$\frac{x^2-y^2}{y^3} = K$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\left(\frac{x^2-y^2}{y^3}\right)' = (K)'$

$\frac{y^3(x^2-y^2)' - (x^2-y^2)(y^3)'}{(y^3)^2} = 0$

$\frac{y^3\left[\left(x^2\right)'-\left(y^2\right)'\right]-\left(x^2-y^2\right)3y^2y\prime}{y^6}=0$

$\frac{y^3[2x-2yy\prime]-\left(x^2-y^2\right)3y^2y\prime}{y^6}=0$

$y^3[2x-2yy']-(x^2-y^2)3y^2y'=y^6\cdot 0$

$2xy^3-2y^4y'-3x^2y^2y'+3y^4y'=0$

$2xy^3+y^4y'-3x^2y^2y'=0$

$y^4y'-3x^2y^2y'=-2xy^3$

$y'(y^4-3x^2y^2)=-2xy^3$

$y'=-\frac{2xy^3}{y^4-3x^2y^2}$

$y'=-\frac{2xy^3}{y^2(y^2-3x^2)}$

$y'=-\frac{2xy}{y^2-3x^2}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{-\frac{2xy}{y^2-3x^2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-3x^2}{2xy}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{2xy}-\frac{3x^2}{2xy}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}y-\frac{3x}{2y}$

$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=-\frac{3x}{2}y^{-1}$, ED de Bernoulli en y con $n=-1$.

Multiplicamos la ED por y.

$y\left(\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=-\frac{3x}{2}y^{-1}\right)$

$y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}yy = -\frac{3x}{2}yy^{-1}$

$y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y^2 = -\frac{3x}{2}$

Sea:

$\boldsymbol{v = y^2}$

$\frac{d}{dy}v = \frac{d}{dy}y^2$

$\frac{dv}{dy} = 2y$

$dv = 2ydy$

$\frac{dv}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{dy}{dx}$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2x}v = -\frac{3x}{2}$

$2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2x}v = -\frac{3x}{2}\right)$

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -3x$, la ED es lineal con v.

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v + 3x = 0$

$dv - \frac{1}{x}vdx + 3xdx = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$\frac{1}{x}\left(dv - \frac{1}{x}vdx + 3xdx = 0\right)$

$\frac{1}{x}dv - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}vdx + 3\frac{1}{x}\cdot xdx = \frac{1}{x}\cdot 0, \quad x \neq 0$

$\frac{1}{x}dv - \frac{1}{x^2}vdx + 3dx = 0$

Factor integrante.

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\int\frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln x}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln x}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x}dv - \frac{1}{x^2}vdx\right) + 3dx = 0$

$d\left(\frac{v}{x}\right) + d(3x) = d(C)$

$d\left(\frac{v}{x} + 3x\right) = d(C)$

$\int d\left(\frac{v}{x} + 3x\right) = \int d(C)$

$\frac{v}{x} + 3x = C$

$\frac{v + 3x^2}{x} = C$

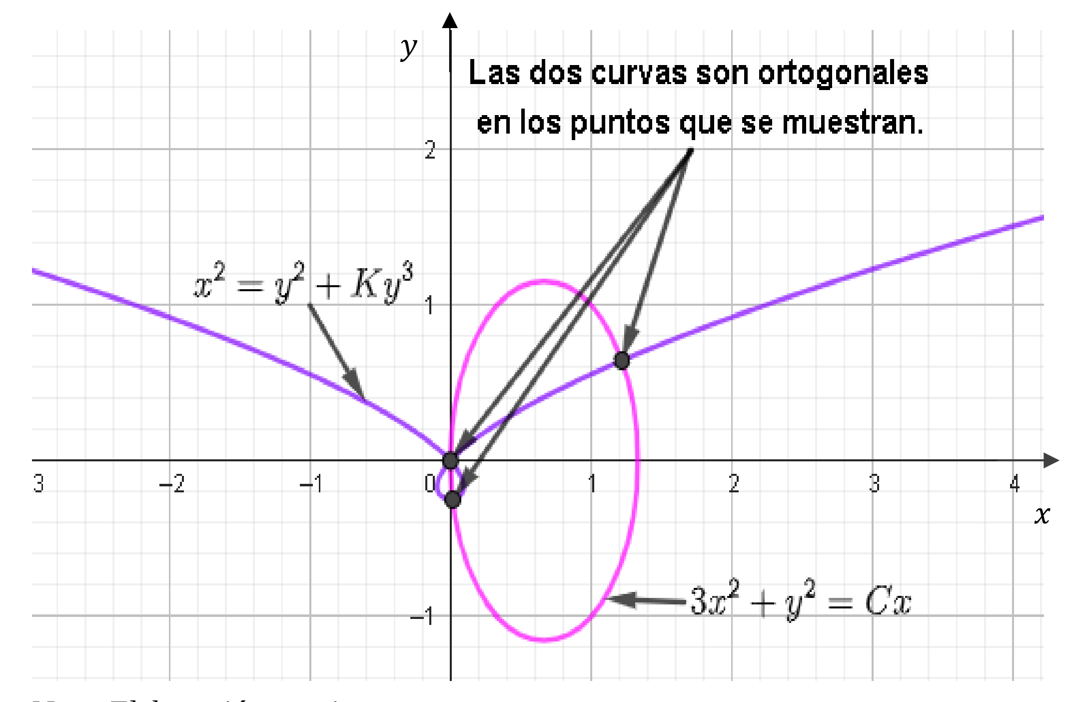
$v + 3x^2 = Cx$, hacemos el cambio de variable $v = y^2$, tenemos $y^2 + 3x^2 = Cx$.

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$\boldsymbol{3x^2 + y^2 = Cx}$

Figura 5

Miembro de cada familia de curva cuando K=4 y C=4.



Nota. Elaboración propia.

3. $y = \tan x + K$

Solución:

$y = \tan x + K$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}(\tan x + K)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) + \frac{d}{dx} K$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + 0$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sec^2 x}$

$\frac{dy}{dx} = -\cos^2 x$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

Utilizando la siguiente identidad trigonométrica $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Resolvemos por separación de variable.

$$dy = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx$$

$\int dy = \int \left[-\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx\right] + C$

$y = -\frac{1}{2}\int(1 + \cos 2x)dx + C$

$y = -\frac{1}{2}[\int dx + \int \cos 2x] + C$

$$y = -\frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right] + C$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

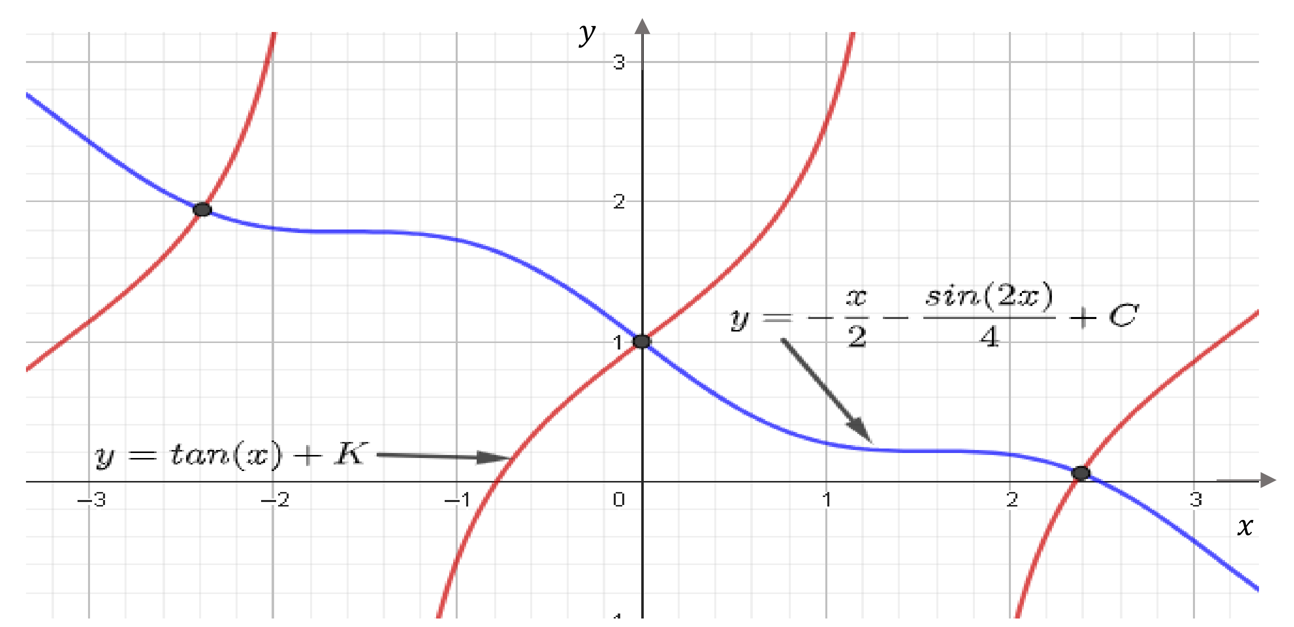
$$y = -\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$$\boldsymbol{y = -\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C}$$

Figura 6

Miembro de cada familia de curva cuando K=1 y C=1.



Nota. Se presenta únicamente una sección de la gráfica, ya que ambas curvas continúan extendiéndose indefinidamente fuera del área mostrada. Esto significa que, en teoría, cada curva sigue su trayectoria sin límite en ambas direcciones, lo cual representa su naturaleza infinita en el contexto del modelo. Elaboración propia.

4. $y = K(\sec x + \tan x)$

Solución:

$y = K(\sec x + \tan x)$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}[K(\sec x + \tan x)]$

$\frac{dy}{dx} = K\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$

$\frac{dy}{dx} = K\left[\frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\tan x)\right]$

$\frac{dy}{dx} = K[\sec x \tan x + \sec^2 x]$ (*)

Despejando K de la ecuación $y = K(\sec x + \tan x)$.

$y = K(\sec x + \tan x)$

$$\frac{y}{\sec x + \tan x} = K$$

Sustituyendo K en la ecuación (*).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sec x + \tan x}[\sec x \tan x + \sec^2 x]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sec x + \tan x} \cdot \sec x\,[\tan x + \sec x]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sec x + \tan x} \cdot \sec x\,[\sec x + \tan x]$$

$\frac{dy}{dx} = y \sec x$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y \sec x}$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{y}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

Resolviendo la ED por separación de variable.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{y}$$

$y dy = -\cos x \, dx$

$\int y dy = \int(-\cos x \, dx) + C$

$\frac{y^2}{2} = -\int \cos x \, dx + C$

$$\frac{y^2}{2} = -\sin x + C$$

$$\frac{y^2}{2} = C - \sin x$$

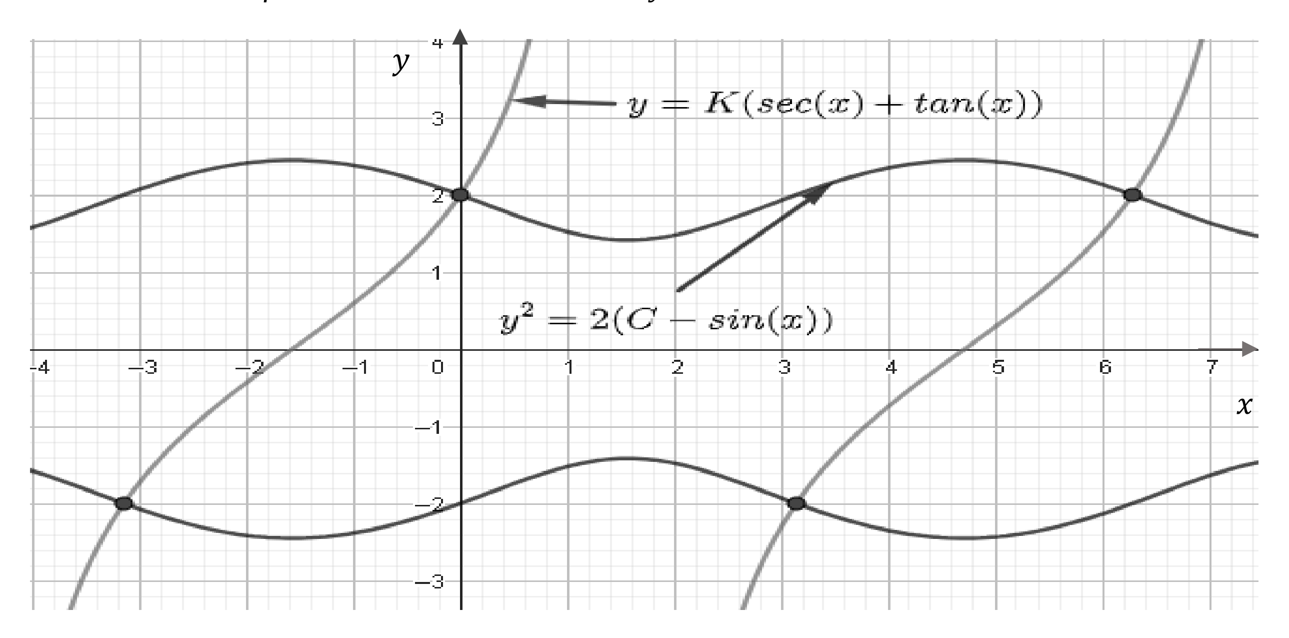
$y^2 = 2(C - \sin x)$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$\boldsymbol{y^2 = 2(C - \sin x)}$

Figura 7

Miembro de cada familia de curva cuando K=2 y C=2.



Nota. Se presenta únicamente una sección de la gráfica, ya que ambas curvas continúan extendiéndose indefinidamente fuera del área mostrada. Esto significa que, en teoría, cada curva sigue su trayectoria sin límite en ambas direcciones, lo cual representa su naturaleza infinita en el contexto del modelo. Elaboración propia.

5. $y = x\tan\frac{1}{2}(y+K)$

Solución:

Despejamos el parámetro K, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$$y = x\tan\frac{1}{2}(y+K)$$

$$\frac{y}{x} = \tan\frac{1}{2}(y+K)$$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}(y+K)$$

$$2\tan^{-1}\frac{y}{x} = y+K$$

$$2\tan^{-1}\frac{y}{x} - y = K$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x} - y\right) = K$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) - \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(\mathrm{K})$$

$$2\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\left[\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)\right] - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\left[\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\frac{d}{dx}(y) - y\frac{d}{dx}(x)}{x^2}\right] - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\left[\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{x\frac{dy}{dx} - y\cdot 1}{x^2}\right] - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\left[\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right] - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\left[\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2+y^2}\right]-\frac{dy}{dx}=0$$

$$2\left[\frac{x\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\right]-\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2x\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2x\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}-\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}-1\right)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{2x-\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2}(x^2+y^2)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{2x-x^2-y^2}$$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{2y}{2x-x^2-y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-x^2-y^2}{2y}$$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

Observamos que la ED no es separable, no es homogénea, no lineal y tampoco Bernoulli.

¿Será ED exactas?

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-x^2-y^2}{2y}$$

$$2ydy=-(2x-x^2-y^2)dx$$

$(2x - x^2 - y^2)dx + 2ydy = 0$ (*)

Verifiquemos la exactitud de la ED (*).

Sea:

$M(x, y) = 2x - x^2 - y^2$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x - x^2 - y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 - 0 - 2y$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2y$

$N(x, y) = 2y$

$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2y)$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Entonces la ED no es exacta.

Busquemos un factor integrante **P**.

¿**P** es función sólo de x?

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{2y}[-2y - 0]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{2y}[-2y]$

$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -1$

Consideremos $f(x) = -1$.

Así: $\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int(-1)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-x}$

Luego, multiplicamos **P** en la ED (*).

$e^{-x}[(2x - x^2 - y^2)dx + 2ydy] = e^{-x} \cdot 0$

$e^{-x}(2x - x^2 - y^2)dx + 2ye^{-x}dy = 0$

$(2xe^{-x} - x^2e^{-x} - y^2e^{-x})dx + 2ye^{-x}dy = 0$, la ED es exacta.

$2xe^{-x}dx - x^2e^{-x}dx - y^2e^{-x}dx + 2ye^{-x}dy = 0$

$(2xe^{-x}dx - x^2e^{-x}dx) + (-y^2e^{-x}dx + 2ye^{-x}dy) = 0$

$d(x^2e^{-x}) + d(y^2e^{-x}) = d(C)$

$d(x^2e^{-x} + y^2e^{-x}) = d(C)$

$\int d(x^2e^{-x} + y^2e^{-x}) = \int d(C)$

$x^2e^{-x} + y^2e^{-x} = C$

$\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^x} = C$

$\frac{x^2 + y^2}{e^x} = C$

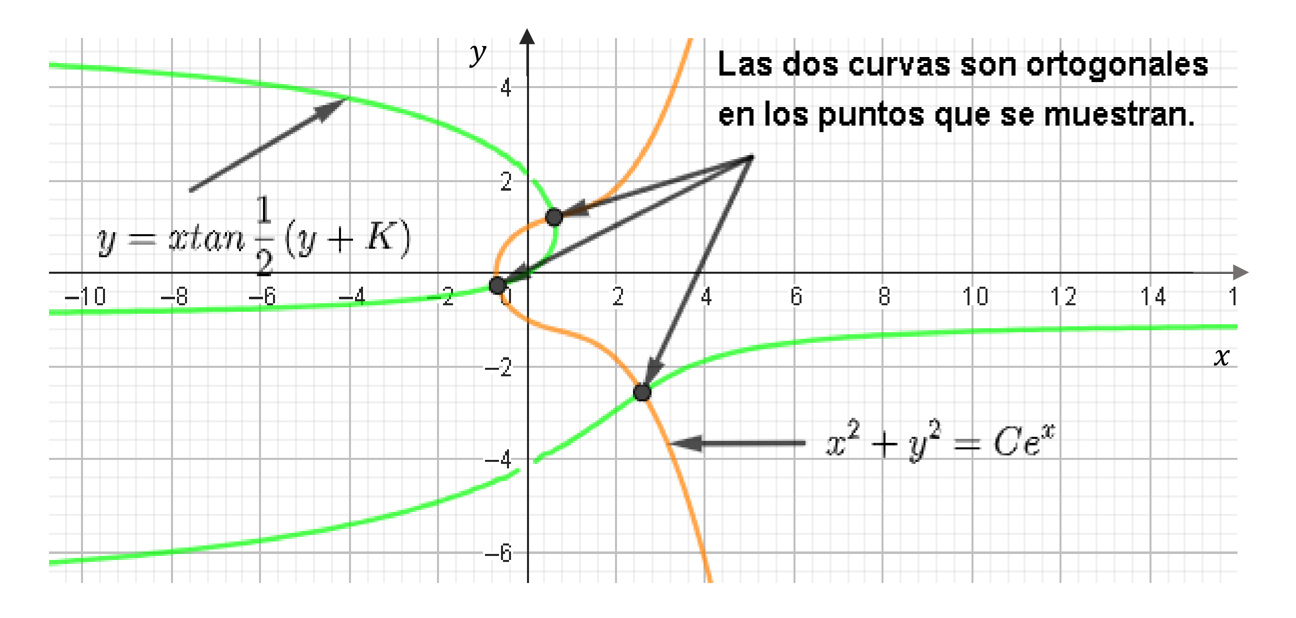
$x^2 + y^2 = Ce^x$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = Ce^x}$

Figura 8

Miembro de cada familia de curva cuando K=1 y C=1.



Nota. Se presenta únicamente una sección de la gráfica, ya que ambas curvas continúan extendiéndose indefinidamente fuera del área mostrada. Esto significa que, en teoría, cada curva sigue su trayectoria sin límite en ambas direcciones, lo cual representa su naturaleza infinita en el contexto del modelo. Elaboración propia.

6. $y = \frac{x}{1+Kx}$

Solución:

Despejamos el parámetro K, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$$y = \frac{x}{1 + Kx}$$

$$y(1 + Kx) = x$$

$$1 + Kx = \frac{x}{y}$$

$$Kx = \frac{x}{y} - 1$$

$$Kx = \frac{x - y}{y}$$

$$K = \frac{x - y}{xy}$$

$$\frac{x - y}{xy} = K$$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\left(\frac{x - y}{xy}\right)' = (K)'$$

$$\frac{xy(x - y)' - (x - y)(xy)'}{(xy)^2} = 0$$

$$\frac{xy[(x)' - (y)'] - (x - y)[y(x)' + x(y)']}{x^2y^2} = 0$$

$$xy[(x)' - (y)'] - (x - y)[y(x)' + x(y)'] = x^2y^2 \cdot 0$$

$$xy[1 - y'] - (x - y)[y \cdot 1 + xy'] = 0$$

$$xy[1 - y'] - (x - y)[y + xy'] = 0$$

$$xy - xyy' - [y(x - y) + xy'(x - y)] = 0$$

$$xy - xyy' - y(x - y) - xy'(x - y) = 0$$

$$-xyy' - xy'(x - y) = y(x - y) - xy$$

$$y'[-xy - x(x - y)] = xy - y^2 - xy$$

$$y'[-xy - x^2 + xy] = xy - y^2 - xy$$

$$y'(-x^2) = -y^2$$

$$y' = \frac{-y^2}{-x^2}$$

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y^2}{x^2}}$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

Resolvemos la ED por separación de variable:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$y^2dy = -x^2dx$$

$$\int y^2dy = \int(-x^2dx) + C$$

$$\int y^2dy = -\int x^2dx + C$$

$$\frac{y^3}{3} = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$3\left(\frac{y^3}{3} = -\frac{x^3}{3} + C\right)$$

$$y^3 = -x^3 + 3C$$

$$x^3 + y^3 = 3C$$

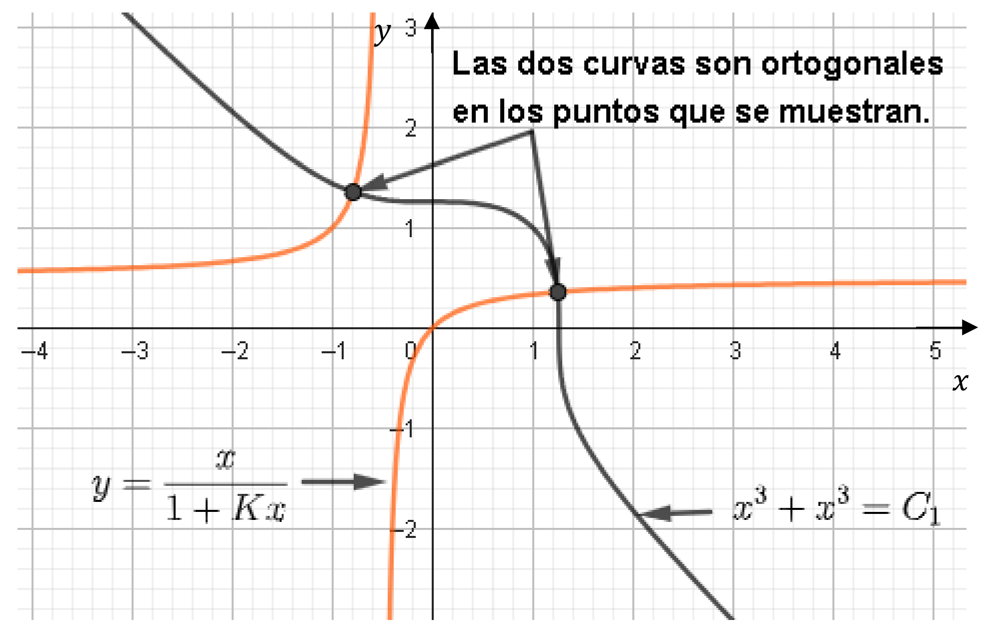
$x^3 + y^3 = C_1$, donde $C_1 = 3C$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$\boldsymbol{x^3 + y^3 = C_1}$

Figura 9

Miembro de cada familia de curva cuando K=2 y C_1 =2.



Nota. Elaboración propia.

7. Encuentre las trayectorias ortogonales a $y^2 = 2x + 1 + Ke^{2x}$. Determine aquel miembro particular de cada familia que pasa por $(0, e)$.

Solución:

$y^2 = 2x + 1 + Ke^{2x}$

$y^2 - 2x - 1 = Ke^{2x}$

$\frac{y^2-2x-1}{e^{2x}} = K$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\left(\frac{y^2-2x-1}{e^{2x}}\right)' = (K)'$

$\frac{e^{2x}(y^2-2x-1)'-(y^2-2x-1)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = 0$

$\frac{e^{2x}\left[(y^2)'-(2x)'-(1)\right]-(y^2-2x-1)2e^{2x}}{e^{4x}} = 0$

$e^{2x}[(y^2)' - (2x)' - (1)] - (y^2 - 2x - 1)2e^{2x} = e^{4x} \cdot 0$

$e^{2x}[2yy' - 2 - 0] - (y^2 - 2x - 1)2e^{2x} = 0$

$e^{2x}[2yy' - 2] = (y^2 - 2x - 1)2e^{2x}$

$2e^{2x}[yy' - 1] = (y^2 - 2x - 1)2e^{2x}$

$yy' - 1 = \frac{(y^2-2x-1)2e^{2x}}{2e^{2x}}$

$yy' - 1 = y^2 - 2x - 1$

$yy' = y^2 - 2x - 1 + 1$

$yy' = y^2 - 2x$

$y' = \frac{y^2-2x}{y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-2x}{y}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y^2-2x}{y}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{y^2-2x}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$(y^2 - 2x)dy = -ydx$

$\frac{y^2-2x}{-y} = \frac{dx}{dy}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2-2x}{-y}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{-y} - \frac{2x}{-y}$

$\frac{dx}{dy} = -y + \frac{2x}{y}$

$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -y$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente y.

$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x + y = 0$

$dx - \frac{2}{y}xdy + ydy = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$\frac{1}{y^2}\left(dx - \frac{2}{y}xdy + ydy = 0\right)$

$\frac{1}{y^2}dx - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{2}{y}xdy + \frac{1}{y^2} \cdot ydy = \frac{1}{y^2} \cdot 0; \quad y^2 \neq 0$

$\frac{1}{y^2}dx - \frac{2}{y^3}xdy + \frac{1}{y}dy = 0$

$\left(\frac{1}{y^2}dx - \frac{2}{y^3}xdy\right) + \frac{1}{y}dy = 0$

$d\left(\frac{x}{y^2}\right) + d(\ln y) = d(C)$

Factor integrante.

$f(y) = -\frac{2}{y}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-2\int\frac{1}{y}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-2\ln y}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln y^2}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln y^2}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{y^2}$

$d\left(\frac{x}{y^2}+\ln y\right)=d(C)$

$\int d\left(\frac{x}{y^2}+\ln y\right)=\int d(C)$

$\frac{x}{y^2}+\ln y=C$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$\boldsymbol{\frac{x}{y^2}+\ln y=C}$

Determinemos aquel miembro particular de cada familia que pasa por $(0,e)$.

Un miembro de la curva dada que pasa por $(0,e)$.

$\frac{y^2-2x-1}{e^{2x}}=K$

$\frac{e^2-2\cdot 0-1}{e^{2\cdot 0}}=K$

$\frac{e^2-1}{e^0}=K$

$\frac{e^2-1}{1}=K$

$e^2-1=K$

$K=e^2-1$

Luego, tenemos:

$\frac{y^2-2x-1}{e^{2x}}=e^2-1$

$\boldsymbol{y^2-2x-1=e^{2x}(e^2-1)}$

Un miembro de la trayectoria ortogonal que pasa por $(0,e)$.

$\frac{x}{y^2}+\ln y=C$

$\frac{0}{e^2}+\ln e=C$

$0+1=C$

$1=C$

$C=1$

Luego, tenemos:

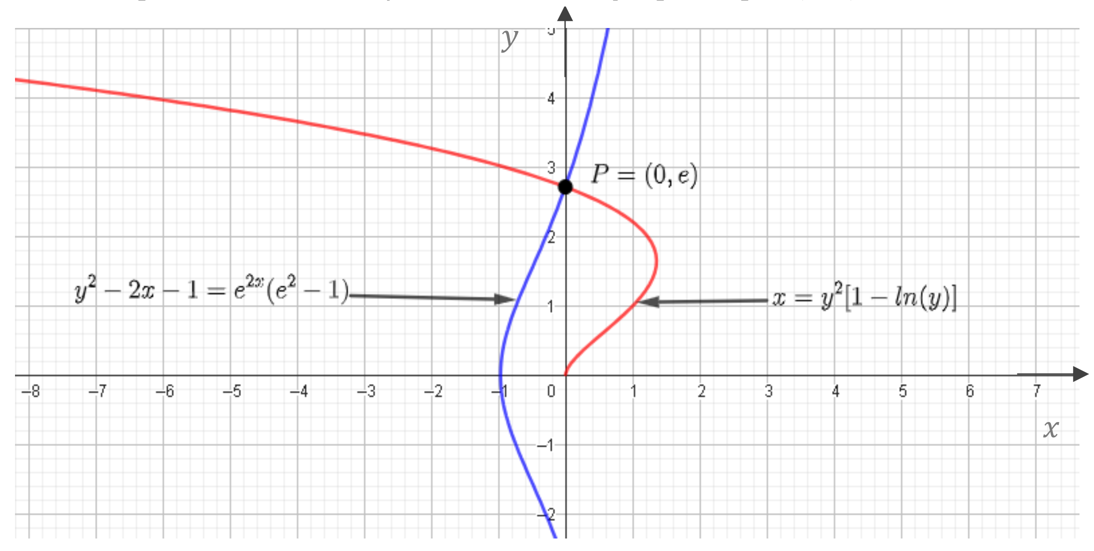
$\frac{x}{y^2}+\ln y=1$

$\frac{x}{y^2}=1-\ln y$

$\boldsymbol{x=y^2(1-\ln y)}$

Figura 10

Miembro particular de cada familia de curva que pasan por (0, e).



Nota. Elaboración propia.

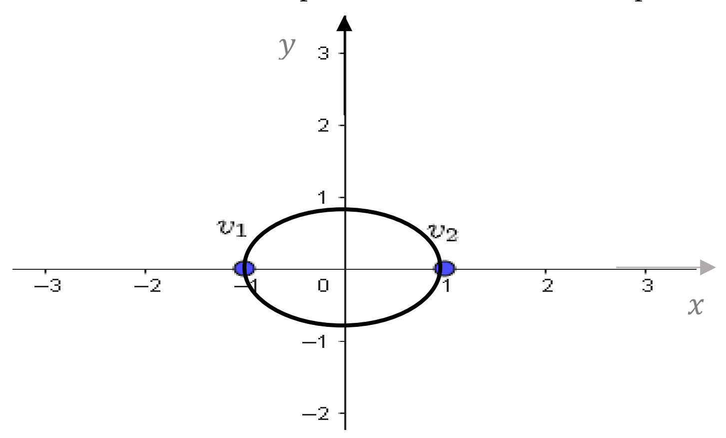
8. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de elipse con centro en $(0,0)$ y dos vértices en $(1,0)$ y $(-1,0)$.

Solución:

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano para saber si la elipse es horizontal o vertical, para luego determinar su ecuación.

Figura 11

Puntos ubicados en el plano cartesiano sobre elipse.



Nota. Elaboración propia.

Observamos que se forma una elipse horizontal, entonces sus vertices estan en el eje x. Por lo tanto, su ecuación es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$v=(\pm a,0) \quad \rightarrow \quad v=(\pm 1,0)$

$a=1$

$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$

Observación:

Para que una elipse sea horizontal, el eje mayor debe estar alineado con el eje x, es decir, el valor de a (semieje mayor) debe estar asociado a la variable x en su ecuación estándar. Además, $a>b$.

Luego tenemos familias de elipse con paramétro b^2.

$$\boldsymbol{x^2+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Despejamos el parámetro b, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{y^2}{b^2}=1-x^2$

$y^2=b^2(1-x^2)$

$\frac{y^2}{1-x^2}=b^2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{1-x^2}\right)=\frac{d}{dx}b^2$

$\frac{(1-x^2)\frac{d}{dx}(y^2)-y^2\frac{d}{dx}(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=0$

$$\frac{(1-x^2)2y\frac{dy}{dx}-y^2(-2x)}{(1-x^2)^2}=0$$

$$(1-x^2)2y\frac{dy}{dx}-y^2(-2x)=(1-x^2)^2\cdot 0$$

$$(1-x^2)2y\frac{dy}{dx}+2xy^2=0$$

$$(1-x^2)2y\frac{dy}{dx}=-2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy^2}{(1-x^2)2y}$$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{-\frac{xy}{1-x^2}}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{xy}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

Resolvemos la ED por separación de variable.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{xy}$$

$$ydy=\frac{1-x^2}{x}dx$$

$$ydy=\left(\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x}\right)dx$$

$$ydy=\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$$

$$\int y dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{1}{x} dx - \int x\, dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$2\left(\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C\right)$$

$$y^2 = 2\ln x - x^2 + 2C$$

$$x^2 + y^2 = 2\ln x + 2C$$

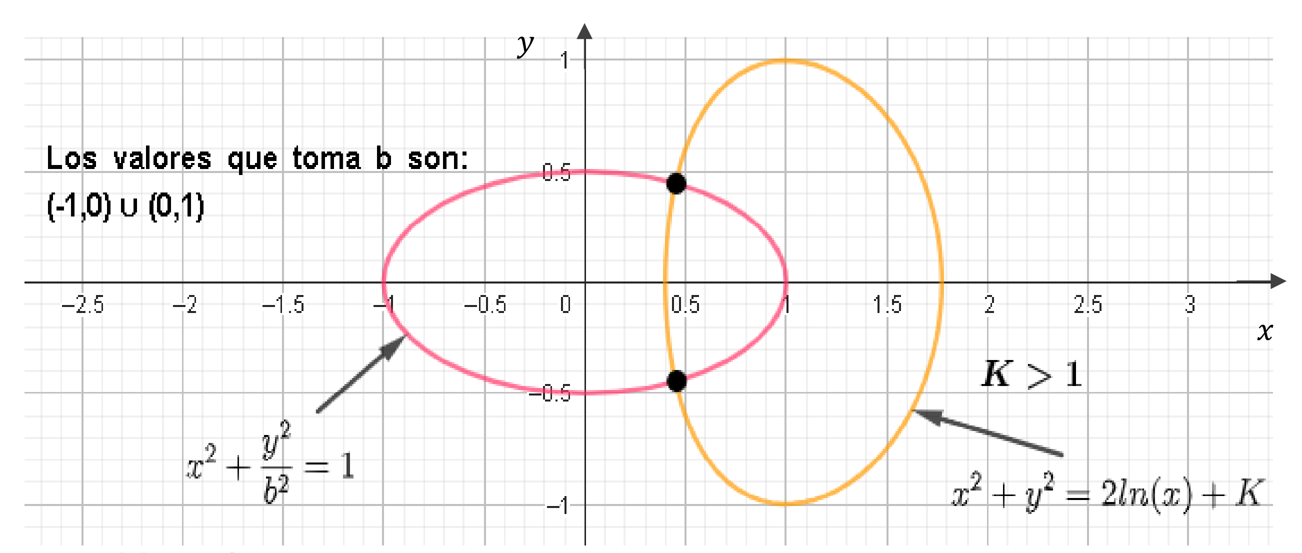
$x^2 + y^2 = 2\ln x + K$, donde $K = 2C$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de la elipse son:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2\ln x + K}$$

Figura 12

Miembro de cada familia de curva cuando b=1/2 y K=2.



Nota. Elaboración propia.

9. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias que pasan por los puntos

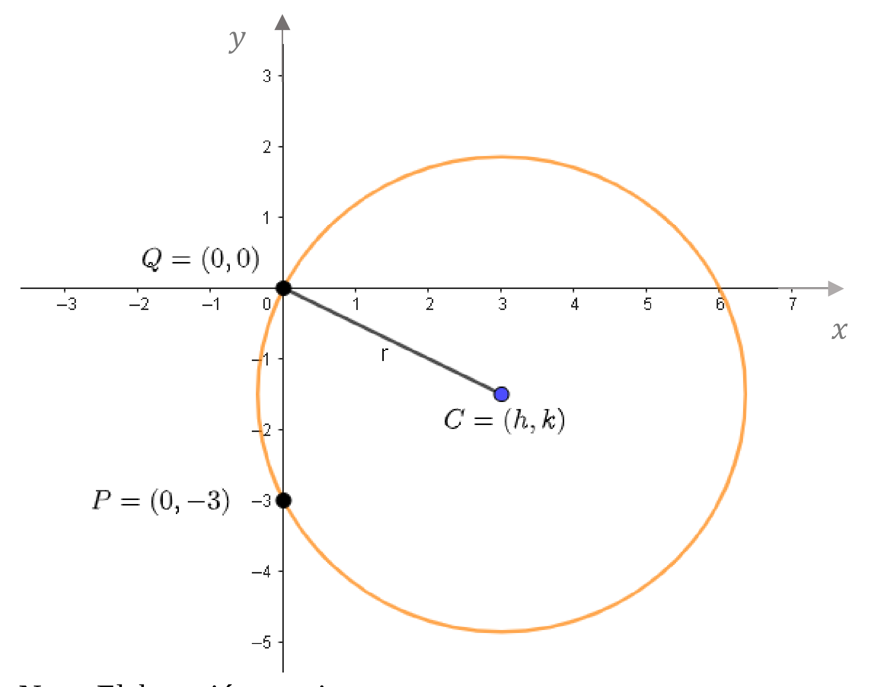
$P = (0,-3)$ y $Q = (0,0)$.

Solución:

Ubicamos los puntos P y Q en el plano cartesiano, luego dibujamos la circunferencia que pase por dicho punto con centro (h,k). Como se muestra en la siguiente gráfica.

Figura 13

Gráfica de una circunferencia con parámetros.



Nota. Elaboración propia.

En la gráfica observamos que el centro está ubicado en el cuarto cuadrante, también se puede dibujar otra circunferencia que pase por P y Q la cual el centro se ubica en el tercer cuadrante. Pero con la gráfica que hemos hecho podemos hallar las familias de circunferencias que pase por P y Q.

Escribimos la ecuación de la circunferencia, cuyo centro no está en el origen.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Calculamos el radio de la circunferencia cuyos puntos son: $C = (h, k)$ y $Q = (0,0)$.

Utilizamos la fórmula de distancia entre dos puntos.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(0 - h)^2 + (0 - k)^2}$

$d = \sqrt{(-h)^2 + (-k)^2}$

$d = \sqrt{h^2 + k^2}$

Entonces el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Reemplazando r en la ecuación de la circunferencia, tenemos:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = \left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^2$

$x^2 - 2xh + \cancel{h^2} + y^2 - 2yk + \cancel{k^2} = \cancel{h^2} + \cancel{k^2}$

$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk = 0$ (*)

Observamos que la ecuación (*) tiene dos parámetros h y k. Para eliminar un parámetro ya sea h o k debemos utilizar el punto por donde pasa dicha circunferencia que es Q y P.

Para el punto $Q = (0,0)$

Reemplazamos en la ecuación (*), tenemos:

$0^2 + 0^2 - 2(0)h - 2(0)k = 0$

$0 + 0 - 0 - 0 = 0$

$0 = 0$

Se puede observar que no quedo ningún parámetro.

Para el punto $P = (0, -3)$

Reemplazando en la ecuación (*), tenemos:

$0^2 + (-3)^2 - 2(0)h - 2(-3)k = 0$

$0 + 9 - 0 + 6k = 0$

$9 + 6k = 0$

$6k = -9$

$k = \frac{-9}{6} \quad \rightarrow \quad k = -\frac{3}{2}$

Se puede observar que nos queda un parámetro k.

Sustituyendo k en la ecuación (*).

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2y\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xh + 3y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 3y = 2xh$$

Por lo tanto, las familias de circunferencias que pasa por Q y P son:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 3y = 2xh} \quad (**)$$

Despejando $2h$ de la ecuación (**).

$$\frac{x^2+y^2+3y}{x} = 2h$$

Calculamos la pendiente de la recta tangente de la ecuación.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+y^2+3y}{x}\right) = \frac{d}{dx}(2h)$$

$$\frac{x\frac{d}{dx}(x^2+y^2+3y)-(x^2+y^2+3y)\frac{d}{dx}(x)}{x^2} = 0$$

$$\frac{x\left(\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)+\frac{d}{dx}(3y)\right)-(x^2+y^2+3y)1}{x^2} = 0$$

$$\frac{x\left(2x+2y\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}\right)-(x^2+y^2+3y)}{x^2} = 0$$

$$x\left(2x + 2y\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx}\right) - (x^2 + y^2 + 3y) = x^2 \cdot 0$$

$$x\left(2x + 2y\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx}\right) - (x^2 + y^2 + 3y) = 0$$

$$x\left(2x + 2y\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx}\right) = x^2 + y^2 + 3y$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2+3y}{x}$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2+3y}{x} - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 3) = \frac{x^2+y^2+3y-2x^2}{x}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+3y-x^2}{x(2y+3)}$ (pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y^2+3y-x^2}{x(2y+3)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(2y+3)}{y^2+3y-x^2}$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(2y+3)}{y^2+3y-x^2}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

Se puede observar que la ED no es separable, no es homogénea, tampoco es lineal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(2y+3)}{y^2+3y-x^2}$$

$$(y^2 + 3y - x^2)dy = -x(2y + 3)dx$$

$$\frac{y^2+3y-x^2}{-x(2y+3)} = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y^2+3y-x^2}{x(2y+3)}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y^2+3y}{x(2y+3)} + \frac{x^2}{x(2y+3)}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y^2+3y}{2y+3}x^{-1} + \frac{x}{2y+3}$$

$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y+3}x = -\frac{y^2+3y}{2y+3}x^{-1}$, ED de Bernoulli en x con $n = -1$.

Multiplicamos la ED por x.

$$x\left(\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y+3}x = -\frac{y^2+3y}{2y+3}x^{-1}\right)$$

$$x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y+3}xx = -\frac{y^2+3y}{2y+3}xx^{-1}$$

$$x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y+3}x^2 = -\frac{y^2+3y}{2y+3}$$

Sea:

$\boldsymbol{v = x^2}$

$\frac{d}{dx}v = \frac{d}{dx}x^2$

$\frac{dv}{dx} = 2x$

$dv = 2xdx$

$\frac{dv}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$

$\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} = x\frac{dx}{dy}$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} - \frac{1}{2y+3}v = -\frac{y^2+3y}{2y+3}$

$2\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} - \frac{1}{2y+3}v = -\frac{y^2+3y}{2y+3}\right)$

$\frac{dv}{dy} - \frac{2}{2y+3}v = -2\frac{y^2+3y}{2y+3}$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dy} - \frac{2}{2y+3}v + 2\frac{y^2+3y}{2y+3} = 0$

$dv - \frac{2}{2y+3}vdy + 2\frac{y^2+3y}{2y+3}dy = 0$ (#)

Multiplicamos **P** en la ED (#).

$\frac{1}{2y+3}\left(dv - \frac{2}{2y+3}vdy + 2\frac{y^2+3y}{2y+3}dy = 0\right)$

$\frac{1}{2y+3}dv - \frac{1}{2y+3}\cdot\frac{2}{2y+3}vdy + 2\frac{1}{2y+3}\cdot\frac{y^2+3y}{2y+3}dy = \frac{1}{2y+3}\cdot 0\,;\, y \neq -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2y+3}dv - \frac{2}{(2y+3)^2}vdy + 2\frac{y^2+3y}{(2y+3)^2}dy = 0$

$\left(\frac{1}{2y+3}dv - \frac{2}{(2y+3)^2}vdy\right) + 2\frac{y^2+3y}{(2y+3)^2}dy = 0$

Factor integrante.

$f(y) = -\frac{2}{2y+3}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(y)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{2}{2y+3}\right)dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\int\frac{2}{2y+3}dy}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln(2y+3)}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln(2y+3)}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2y+3}$

$$d\left(\frac{v}{2y+3}\right)+2\frac{y^2+3y}{(2y+3)^2}dy=d(C)$$

$$\int d\left(\frac{v}{2y+3}\right)+\int 2\frac{y^2+3y}{(2y+3)^2}dy=\int d(C)$$

$$\frac{v}{2y+3}+2\int\frac{y^2+3y}{(2y+3)^2}dy=C$$

Sea: $I=\int\frac{y^2+3y}{(2y+3)^2}dy$

$$\frac{v}{2y+3}+2I=C$$

$$\frac{v}{2y+3}+2\left(-\frac{y^2+3y}{2(2y+3)}+\frac{1}{2}y+C_1\right)=C$$

$$\frac{v}{2y+3}-\frac{y^2+3y}{2y+3}+y+2C_1=C$$

$$\frac{v}{2y+3}+y-\frac{y^2+3y}{2y+3}=C-2C_1$$

$$\frac{v}{2y+3}+y-\frac{y^2+3y}{2y+3}=C_2\ ;\ \ K=C-2C_1\ \ (\#\#)$$

Reemplazando $v=x^2$ en la ecuación (##).

$$\frac{x^2}{2y+3}+y-\frac{y^2+3y}{2y+3}=C_2$$

$$\frac{x^2+y(2y+3)}{2y+3}-\frac{y^2+3y}{2y+3}=C_2$$

$$\frac{x^2+y(2y+3)-(y^2+3y)}{2y+3}=C_2$$

$$\frac{x^2+2y^2+3y-y^2-3y}{2y+3}=C_2$$

$$\frac{x^2+y^2}{2y+3}=C_2$$

$$x^2+y^2=C_2(2y+3)$$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de circunferencias (**) es:

$$\boldsymbol{x^2+y^2=C_2(2y+3)}$$

$$I=\int\frac{y^2+3y}{(2y+3)^2}dy$$

Aplicando integración por partes.

$u=y^2+3y$ $\qquad dv=\frac{1}{(2y+3)^2}dy$

$\frac{d}{dy}u=\frac{d}{dy}(y^2+3y)$ $\qquad \int dv=\int\frac{1}{(2y+3)^2}dy$

$\frac{du}{dy}=\frac{d}{dy}(y^2)+3\frac{d}{dy}(y)$ $\qquad v=-\frac{1}{2(2y+3)}$

$$\frac{du}{dy}=2y+3$$

$$du=(2y+3)dy$$

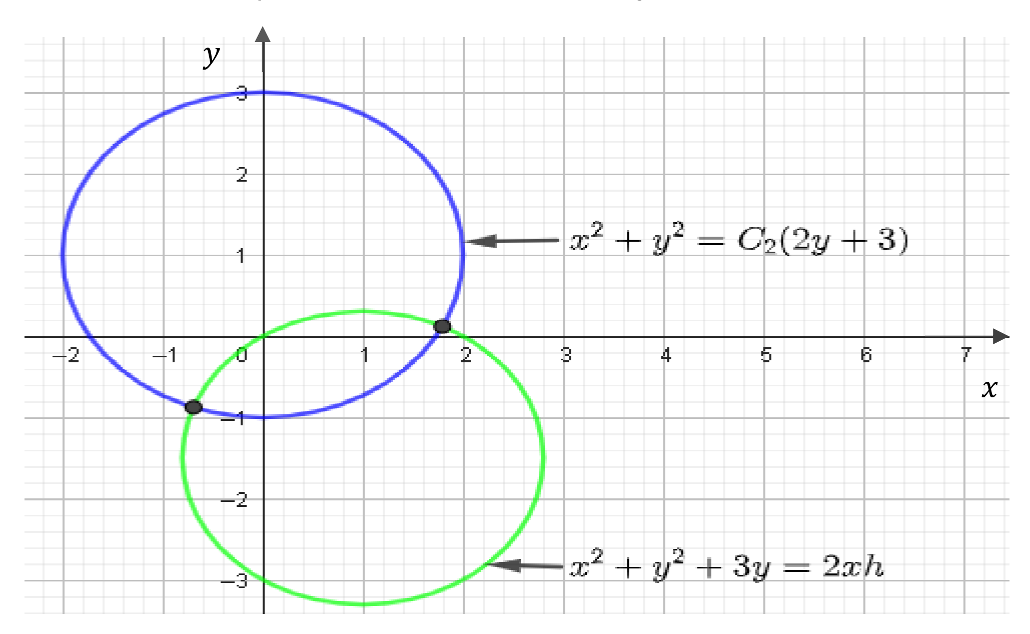
$$I=(y^2+3y)\cdot-\frac{1}{2(2y+3)}-\int-\frac{1}{2(2y+3)}(2y+3)dy+C_1$$

$$I=-\frac{y^2+3y}{2(2y+3)}+\frac{1}{2}\int dy+C_1$$

$$I=-\frac{y^2+3y}{2(2y+3)}+\frac{1}{2}y+C_1$$

Figura 14

Miembro de cada familia de curva cuando h=1 y C_2 =1.



Nota. Elaboración propia.

10. Hallar el valor de m de modo que $x^m + y^m + 25 = Kx$ sea las trayectorias ortogonales de las circunferencias $x^2 + y^2 - 2Cy = 25$.

Solución:

Despejamos $2C$ de la ecuación $x^2 + y^2 - 2Cy = 25$, tenemos:

$x^2 + y^2 - 2Cy = 25$

$x^2 + y^2 - 25 = 2Cy$

$\frac{x^2+y^2-25}{y} = 2C$ (*)

Calculamos la pendiente de la recta tangente de la ecuación (*).

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+y^2-25}{y}\right) = \frac{d}{dx}(2C)$

$\frac{y\frac{d}{dx}(x^2+y^2-25)-(x^2+y^2-25)\frac{d}{dx}(y)}{y^2} = 0$

$$\frac{y\left[\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(25)\right]-(x^2+y^2-25)\frac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$$\frac{y\left[2x+2y\frac{dy}{dx}-0\right]-(x^2+y^2-25)\frac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$$\frac{y\left[2x+2y\frac{dy}{dx}\right]-(x^2+y^2-25)\frac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$$\frac{2xy+2y^2\frac{dy}{dx}-(x^2+y^2-25)\frac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$$2xy+2y^2\frac{dy}{dx}-(x^2+y^2-25)\frac{dy}{dx}=y^2\cdot 0$$

$$2xy+2y^2\frac{dy}{dx}-(x^2+y^2-25)\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y^2\frac{dy}{dx}-(x^2+y^2-25)\frac{dy}{dx}=-2xy$$

$$\frac{dy}{dx}[2y^2-(x^2+y^2-25)]=-2xy$$

$$\frac{dy}{dx}[2y^2-x^2-y^2+25]=-2xy$$

$$\frac{dy}{dx}[y^2-x^2+25]=-2xy$$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{y^2-x^2+25}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{-\frac{2xy}{y^2-x^2+25}}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2+25}{2xy}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-(x^2-25)}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{2xy}-\frac{x^2-25}{2xy}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} - \frac{(x^2-25)}{2x} y^{-1}$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y = -\frac{(x^2-25)}{2x} y^{-1}$, ED de Bernoulli en y con $n = -1$. (**)

Multiplicamos por y la ED (**).

$y\left[\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y = -\frac{(x^2-25)}{2x} y^{-1}\right]$

$y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} yy = -\frac{(x^2-25)}{2x} y^{-1}y$

$y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y^2 = -\frac{(x^2-25)}{2x}$

Sea:

$\boldsymbol{v = y^2}$

$\frac{d}{dy} v = \frac{d}{dy} y^2$

$\frac{dv}{dy} = 2y$

$dv = 2ydy$

$\frac{1}{2} dv = ydy$

$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = y\frac{dy}{dx}$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2x} v = -\frac{(x^2-25)}{2x}$

$2\left[\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2x} v = -\frac{(x^2-25)}{2x}\right]$

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = -\frac{(x^2-25)}{x}$, la ED es lineal en v.

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v + \frac{x^2-25}{x} = 0$

$dv + \left(-\frac{1}{x} v + \frac{x^2-25}{x}\right) dx = 0$ (#)

Multiplicamos **P** en la ED (#).

$\frac{1}{x}\left[dv+\left(-\frac{1}{x}v+\frac{x^2-25}{x}\right)dx=0\right]$

$\frac{1}{x}dv+\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}v+\frac{x^2-25}{x}\right)dx=\frac{1}{x}\cdot 0\,;\;\; x\neq 0$

$\frac{1}{x}dv+\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}v+\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-25}{x}\right)dx=0$

$\frac{1}{x}dv+\left(-\frac{1}{x^2}v+\frac{x^2-25}{x^2}\right)dx=0$

$\frac{1}{x}dv-\frac{1}{x^2}vdx+\frac{x^2-25}{x^2}dx=0$

$\left(\frac{1}{x}dv-\frac{1}{x^2}vdx\right)+\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{25}{x^2}\right)dx=0$

$\left(\frac{1}{x}dv-\frac{1}{x^2}vdx\right)+\left(1-\frac{25}{x^2}\right)dx=0$

$d\left(\frac{v}{x}\right)+d\left(x+\frac{25}{x}\right)=d(K)$

$d\left(\frac{v}{x}+x+\frac{25}{x}\right)=d(K)$

$\int d\left(\frac{v}{x}+x+\frac{25}{x}\right)=\int d(K)$

$\frac{v}{x}+x+\frac{25}{x}=K$

$\frac{v+x^2+25}{x}=K$

$v+x^2+25=Kx$ (##)

Reemplazando $v=y^2$ en la ecuación (##).

$y^2+x^2+25=Kx$

$x^2+y^2+25=Kx$

Luego, comparamos $x^2+y^2+25=Kx$ con $x^m+y^m+25=Kx$ para que sea trayectoria ortogonal a $x^2+y^2-2Cy=25$. Por lo tanto, el valor de $\boldsymbol{m=2}$.

Factor integrante.

$f(x)=-\frac{1}{x}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{-\ln x}$

$\boldsymbol{P}=\frac{1}{e^{\ln x}}$

$\boldsymbol{P}=\frac{1}{x}$

Para saber que valores debe tomar K y C, tenemos que llevar las dos ecuaciones de las circunferencias a su forma ordinaria y determinar si admite restricciones.

$$x^2 + y^2 + 25 = Kx$$

$$x^2 - Kx + y^2 = -25$$

$$x^2 - Kx + \left(\frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2 - 25$$

$$\left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{K^2}{4} - 25$$

El radio de la circunferencia debe ser mayor que cero, así:

$$\frac{K^2}{4} - 25 > 0$$

$$K^2 - 100 > 0$$

$$(K + 10)(K - 10) > 0$$

Puntos críticos: $K_1 = -10$ y $K_2 = 10$.

$-\infty$ < K < -10	-10 < K < 10	10 < K < ∞
$K = -11$	$K = 0$	$K = 11$
$+$	$-$	$+$

Solución: $K = (-\infty, -10) \cup (10, \infty)$

$$x^2 + y^2 - 2Cy = 25$$

$$x^2 + y^2 - 2Cy + \left(\frac{2C}{2}\right)^2 = \left(\frac{2C}{2}\right)^2 + 25$$

$$x^2 + y^2 - 2Cy + C^2 = C^2 + 25$$

$$(x - 0)^2 + (y - C)^2 = C^2 + 25$$

El radio de la circunferencia debe ser mayor que cero, así:

$$C^2 + 25 > 0$$

Esta desigualdad es cierta para cualquier valor de C.

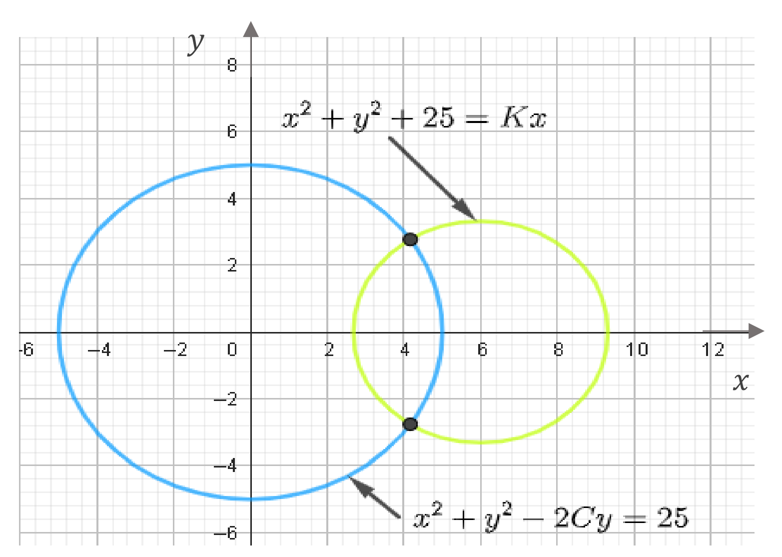
Es decir, $C \in \mathbb{R}$.

A partir de la restricción impuesta por K y considerando todos los valores reales de C, es posible construir una gráfica donde los puntos representen circunferencias. Estas circunferencias se generan al mantener constantes ciertas condiciones sobre K y C, lo que permite observar cómo varían los radios o posiciones en el plano.

Figura 15



Miembro de cada familia de curva cuando K=11 y C=0.



Nota. Elaboración propia.

11. $4y + x^2 + 1 + Ke^{2y} = 0$

Solución:

Despejamos el parámetro K, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$$4y + x^2 + 1 + Ke^{2y} = 0$$

$$4y + x^2 + 1 = -Ke^{2y}$$

$$\frac{4y+x^2+1}{e^{2y}} = -K$$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\left(\frac{4y+x^2+1}{e^{2y}}\right)' = (-K)'$$

$$\frac{e^{2y}\left(4y+x^2+1\right)' - \left(4y+x^2+1\right)\left(e^{2y}\right)'}{(e^{2y})^2} = 0$$

$$\frac{e^{2y}\left[(4y)'+\left(x^2\right)'+(1)'\right]-\left(4y+x^2+1\right)2e^{2y}}{(e^{2y})^2}=0$$

$$\frac{e^{2y}[4y\prime+2x+0]-\left(4y+x^2+1\right)2e^{2y}}{(e^{2y})^2}=0$$

$$e^{2y}[4y'+2x]-(4y+x^2+1)2e^{2y}y'=0\cdot(e^{2y})^2$$

$$4y'e^{2y}+2xe^{2y}-8ye^{2y}y'-2x^2e^{2y}y'-2e^{2y}y'=0$$

$$4y'e^{2y}-8ye^{2y}y'-2x^2e^{2y}y'-2e^{2y}y'=-2xe^{2y}$$

$$(4e^{2y}-8ye^{2y}-2x^2e^{2y}-2e^{2y})y'=-2xe^{2y}$$

$$y'=-\frac{2xe^{2y}}{4e^{2y}-8ye^{2y}-2x^2e^{2y}-2e^{2y}}$$

$$y'=-\frac{2xe^{2y}}{e^{2y}(4-8y-2x^2-2)}$$

$$y'=-\frac{2xe^{2y}}{2e^{2y}(2-4y-x^2-1)}$$

$$y'=-\frac{x}{1-4y-x^2}$$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{-\frac{x}{1-4y-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-4y-x^2}{x}$$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{x}-\frac{4}{x}y$$

$\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y=\frac{1-x^2}{x}$, la ED es lineal en y.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y-\frac{1-x^2}{x}=0$$

$$dy+\left(\frac{4y}{x}-\frac{1-x^2}{x}\right)dx=0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$x^4\left[dy+\left(\frac{4y}{x}-\frac{1-x^2}{x}\right)dx\right]=0\cdot x^4$

$x^4dy+x^4\left(\frac{4y}{x}-\frac{1-x^2}{x}\right)dx=0$

$x^4dy+4x^3ydx-x^3(1-x^2)dx=0$

$x^4dy+4x^3ydx-x^3dx+x^5dx=0$

$d(yx^4)-d\left(\frac{1}{4}x^4\right)+d\left(\frac{1}{6}x^6\right)=d(C)$

$\int d(yx^4)-\int d\left(\frac{1}{4}x^4\right)+\int d\left(\frac{1}{6}x^6\right)=\int d(C)$

$yx^4-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6=C$

$yx^4=C-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4$

$y=\frac{C-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4}{x^4}$

$y=\frac{C}{x^4}-\frac{\frac{1}{6}x^6}{x^4}+\frac{\frac{1}{4}x^4}{x^4}$

$y=Cx^{-4}-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}$

Factor integrante.

$f(x)=\frac{4}{x}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{4}{x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{4\int\frac{1}{x}dx}$

$\boldsymbol{P}=e^{4\ln x}$

$\boldsymbol{P}=e^{\ln x^4}$

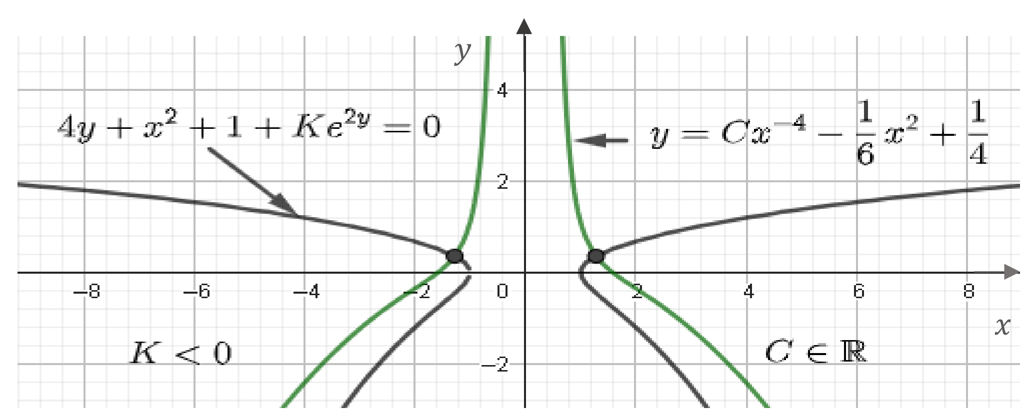
$\boldsymbol{P}=x^4$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$\boldsymbol{y=Cx^{-4}-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}}$

Figura 16

Miembro de cada familia de curva cuando K=-2 y C=1.



Nota. Elaboración propia.

12. $y = \ln(\tan x + K)$

Solución:

Despejamos el parámetro k, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$y = \ln(\tan x + K)$

$e^y = \tan x + K$

$e^y - \tan x = K$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$(e^y - \tan x)' = (K)'$

$(e^y)' - (\tan x)' = 0$

$e^y y' - \sec^2 x = 0$

$e^y y' = \sec^2 x$

$y' = \frac{\sec^2 x}{e^y}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{\sec^2 x}{e^y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{\sec^2 x}$$

$\frac{dy}{dx} = -e^y \cos^2 x$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$\frac{dy}{dx} = -e^y \cos^2 x$, ED de variable separable.

$$\frac{1}{-e^{y}}dy = \cos^2 x\,dx$$

$$-e^{-y}dy = \cos^2 x\,dx$$

$$\int(-e^{-y}dy) = \int \cos^2 x\,dx + C$$

$$-\int e^{-y}dy = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx + C; \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$e^{-y} = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx + C$$

$$e^{-y} = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\,dx\right) + C$$

$$e^{-y} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$$

$$\frac{1}{e^{y}} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2\sin x\cos x}{2}\right) + C; \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\frac{1}{e^{y}} = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$$

$$\frac{1}{e^{y}} = \frac{x + \sin x\cos x + 2C}{2}$$

$$\frac{1}{e^{y}} = \frac{x + \sin x\cos x + C_1}{2}; \qquad C_1 = 2C$$

$$e^{y} = \frac{2}{x + \sin x\cos x + C_1}$$

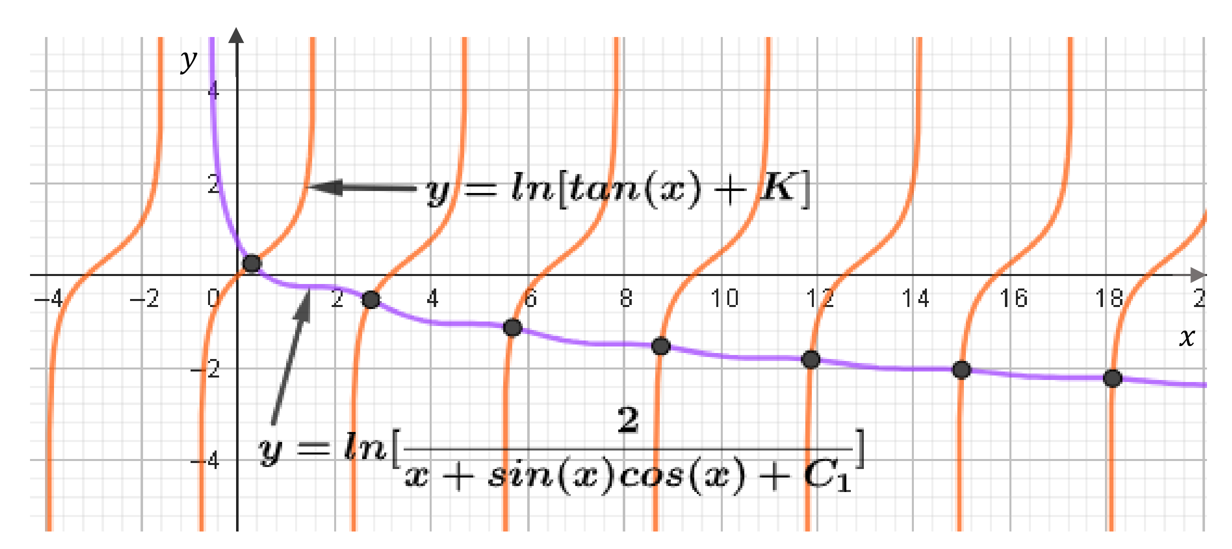
$$y = \ln\left(\frac{2}{x + \sin x\cos x + C_1}\right)$$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$$\boldsymbol{y = \ln\left(\frac{2}{x + \sin x\cos x + C_1}\right)}$$

Figura 17

Miembro de cada familia de curva cuando K=1 y C_1 =1.



Nota. Se presenta únicamente una sección de la gráfica, destacando los puntos donde ambas curvas se intersecan de manera ortogonal. Esta intersección y la disposición ortogonal de las curvas continúan extendiéndose indefinidamente hacia la derecha, lo que indica que la relación de perpendicularidad entre ellas persiste más allá del área mostrada en la gráfica. Elaboración propia.

13. $y = \frac{1+Kx}{1-Kx}$

Solución:

Despejamos el parámetro K, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$$y = \frac{1 + Kx}{1 - Kx}$$

$$y(1 - Kx) = 1 + Kx$$

$$y - Kxy = 1 + Kx$$

$$y - 1 = Kx + Kxy$$

$$y - 1 = K(x + xy)$$

$$\frac{y-1}{x+xy} = K$$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\left(\frac{y-1}{x+xy}\right)' = (K)'$$

$$\frac{(x+xy)(y-1)' - (y-1)(x+xy)'}{(x+xy)^2} = 0$$

$$(x+xy)[(y)' - (1)'] - (y-1)[(x)' + (xy)'] = 0 \cdot (x+xy)^2$$

$$(x+xy)[y' - 0] - (y-1)[1 + yx' + xy'] = 0$$

$$(x+xy)[y'] - (y-1)[1 + y \cdot 1 + xy'] = 0$$

$$(x+xy)[y'] - (y-1)[1 + y + xy'] = 0$$

$$(x+xy)[y'] - (y-1)(y+1) - (y-1)xy' = 0$$

$$(x+xy)[y'] - (y^2-1) - (y-1)xy' = 0$$

$$(x+xy)[y'] - (y-1)xy' = y^2 - 1$$

$$[x + xy - (y-1)x]y' = y^2 - 1$$

$$[x + xy - xy + x]y' = y^2 - 1$$

$$[2x]y' = y^2 - 1$$

$y' = \frac{y^2-1}{2x}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y^2-1}{2x}}$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y^2-1}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y^2-1}$, la ED es de variable separable.

$$(y^2 - 1)dy = -2xdx$$

$$\int (y^2 - 1)dy = \int (-2xdx) + C$$

$$\int y^2\, dy - \int dy = -2\int x\, dx + C$$

$$\frac{y^3}{3} - y = -2 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{y^3}{3} - y = -x^2 + C$$

$$3\left(\frac{y^3}{3} - y = -x^2 + C\right)$$

$$y^3 - 3y = -3x^2 + 3C$$

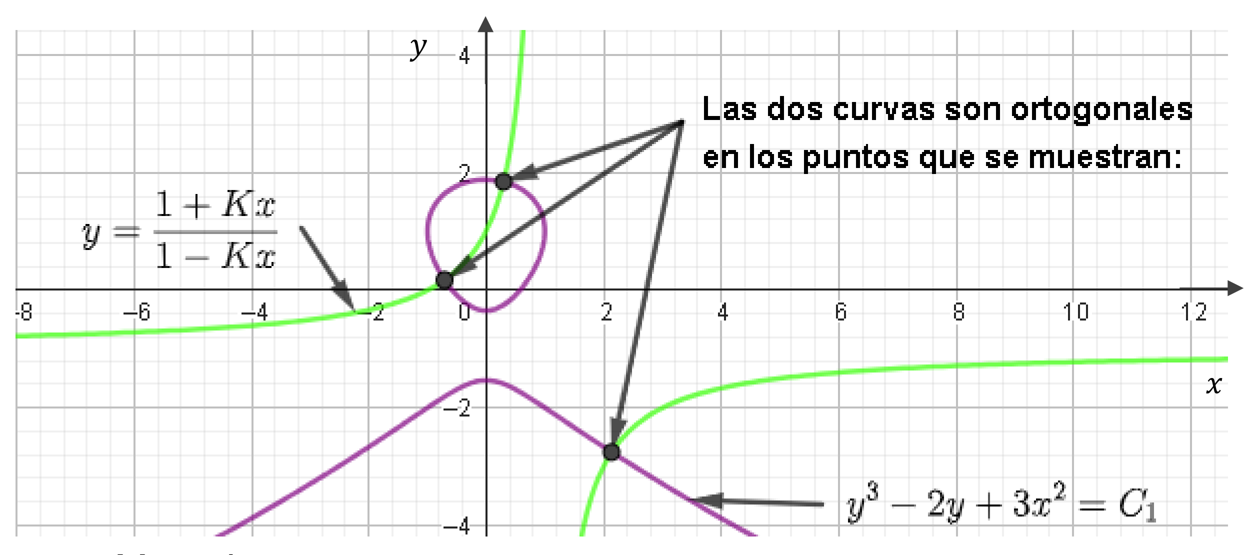
$$y^3 - 3y + 3x^2 = C_1; \quad C_1 = 3C$$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$$\boldsymbol{y^3 - 3y + 3x^2 = C_1}$$

Figura 18

Miembro de cada familia de curva cuando K=1 y C_1 =1.



Nota. Elaboración propia.

14. $y = \frac{1}{\ln Kx}$

Solución:

Despejamos el parámetro k, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$y = \frac{1}{\ln Kx}$

$y(\ln K\,x) = 1$

$\ln Kx = \frac{1}{y}$

$\ln K + \ln x = \frac{1}{y}$

$\ln K = \frac{1}{y} - \ln x$

$\frac{1}{y} - \ln x = \ln K$

Consideramos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\left(\frac{1}{y} - \ln x\right)' = (\ln K)'$

$\left(\frac{1}{y}\right)' - (\ln x)' = 0$

$(y^{-1})' - \frac{1}{x} = 0$

$-y^{-2}y' - \frac{1}{x} = 0$

$$-\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x}$$

$y' = -\frac{y^2}{x}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{-\frac{y^2}{x}}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$, ED de variable separable.

$$y^2dy = xdx$$

$$\int y^2dy = \int xdx + C$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y^3 = 3\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$$y^3 = \frac{3}{2}x^2 + 3C$$

$$y^3 = \frac{3}{2}x^2 + C_1; \qquad C_1 = 3C$$

$$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C_1}$$

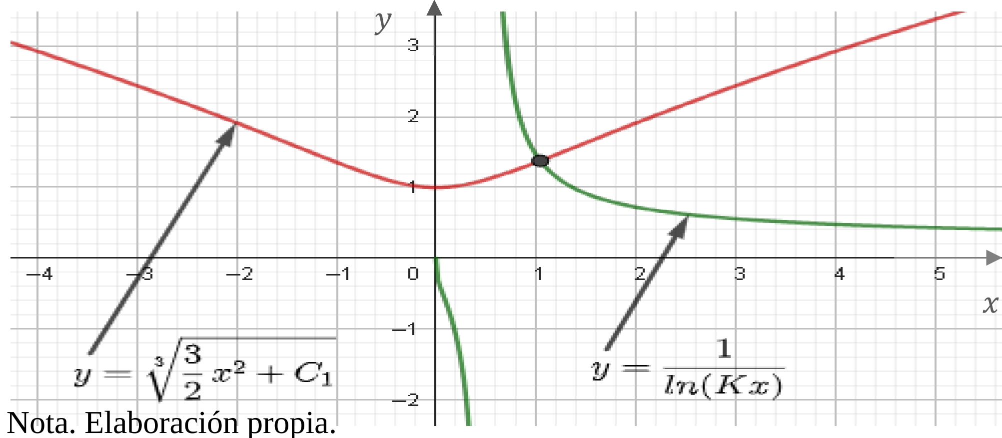
$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C_1}$$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C_1}}$$

Figura 19

Miembro de cada familia de curva cuando K=2 y C_1 *=1.*



Nota. Elaboración propia.

15. $y^2 = 4Kx + 4K^2$

Solución:

Despejamos el parámetro K, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$y^2 = 4Kx + 4K^2$

$y^2 + x^2 = x^2 + 4Kx + 4K^2$, sumamos x^2 ambos miembros de la ecuación.

$y^2 + x^2 = (x + 2K)^2$

$\sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{(x + 2K)^2}$

$\sqrt{y^2 + x^2} = x + 2K$

$\sqrt{y^2 + x^2} - x = 2K$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\left(\sqrt{y^2 + x^2} - x\right)' = (2K)'$

$\left(\sqrt{y^2 + x^2}\right)' - (x)' = 0$

$\left[(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' - 1 = 0$

$\frac{1}{2}(y^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}(y^2 + x^2)' = 1$

$\frac{1}{2}(y^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}[(y^2)' + (x^2)'] = 1$

$\frac{1}{2(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}[2yy' + 2x] = 1$

$2yy' + 2x = 2(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$2(yy' + x) = 2(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$yy' + x = (y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$yy' = \sqrt{y^2 + x^2} - x$

$y' = \frac{\sqrt{y^2+x^2}-x}{y}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{y^2+x^2}-x}{y}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}-x}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$\left(\sqrt{y^2 + x^2} - x\right) dy = -ydx$

$ydx + \left(\sqrt{y^2 + x^2} - x\right) dy = 0$

Comprobamos que la ED es homogénea.

$M(x, y) = y$

$M(tx, ty) = ty$

$\boldsymbol{M(tx, ty) = tM(x, y)}$

$N(x, y) = \sqrt{y^2 + x^2} - x$

$N(tx, ty) = \sqrt{(ty)^2 + (tx)^2} - tx$

$N(tx, ty) = \sqrt{t^2y^2 + t^2x^2} - tx$

$N(tx, ty) = \sqrt{t^2(y^2 + x^2)} - tx$

$N(tx, ty) = t\sqrt{y^2 + x^2} - tx$

$N(tx, ty) = t\left(\sqrt{y^2 + x^2} - x\right)$

$\boldsymbol{N(tx, ty) = tN(x, y)}$

Así, las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado 1.

Como $M(x, y)$ es de estructura más simple que $N(x, y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$x = yv \quad \rightarrow \quad dx = vdy + ydv.$

$$y(vdy + ydv) + \left(\sqrt{y^2 + (yv)^2} - yv\right) dy = 0$$

$$y(vdy + ydv) + \left(\sqrt{y^2 + y^2v^2} - yv\right) dy = 0$$

$$y(vdy + ydv) + \left(\sqrt{y^2(1 + v^2)} - yv\right) dy = 0$$

$$y(vdy + ydv) + \left(y\sqrt{1 + v^2} - yv\right) dy = 0$$

$$y(vdy + ydv) + y\left(\sqrt{1 + v^2} - v\right) dy = 0$$

$$\frac{y(vdy + ydv) + y\left(\sqrt{1 + v^2} - v\right)dy}{y} = \frac{0}{y}; \qquad y \neq 0$$

$$\frac{y\left[(vdy + ydv) + \left(\sqrt{1 + v^2} - v\right)dy\right]}{y} = 0$$

$$vdy + ydv + \left(\sqrt{1 + v^2} - v\right) dy = 0$$

$$vdy + ydv + \sqrt{1 + v^2}dy - vdy = 0$$

$$\sqrt{1 + v^2}dy + ydv = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = 0$$

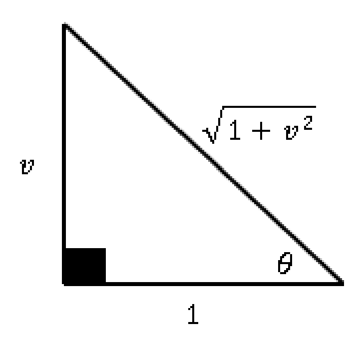
$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = C$$

$$\ln y + \int \cos\theta \sec^2\theta \, d\theta = C$$

$$\ln y + \int \frac{1}{\sec\theta} \sec^2\theta \, d\theta = C$$

$$\ln y + \int \sec\theta \, d\theta = C$$

Sustitución trigonométrica.



$\tan\theta = v \qquad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + v^2}}$

$v = \tan\theta$

$\frac{dv}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\tan\theta$

$\frac{dv}{d\theta} = \sec^2\theta$

$dv = \sec^2\theta \, d\theta$

$\ln y + \ln(\sec\theta + \tan\theta) = C$

Escribiendo en término de v.

$\ln y + \ln\left(\sqrt{1+v^2} + v\right) = C$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$, se obtiene:

$\ln y + \ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + \frac{x}{y}\right) = C$

$\ln y + \ln\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} + \frac{x}{y}\right) = C$

$\ln y + \ln\left(\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}} + \frac{x}{y}\right) = C$

$\ln y + \ln\left(\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{y} + \frac{x}{y}\right) = C$

$\ln y + \ln\left(\frac{\sqrt{y^2+x^2}+x}{y}\right) = C$

$\ln\left(y\,\frac{\sqrt{y^2+x^2}+x}{y}\right) = C$

$\ln\left(\sqrt{y^2+x^2} + x\right) = C$

$\sqrt{y^2+x^2} + x = e^C$

$\sqrt{y^2+x^2} + x = C_1; \quad C_1 = e^C$

$\sqrt{y^2+x^2} = C_1 - x$

$\left(\sqrt{y^2+x^2}\right)^2 = (C_1 - x)^2$

$y^2 + x^2 = {C_1}^2 - 2C_1x + x^2$

$y^2 = {C_1}^2 - 2C_1x + x^2 - x^2$

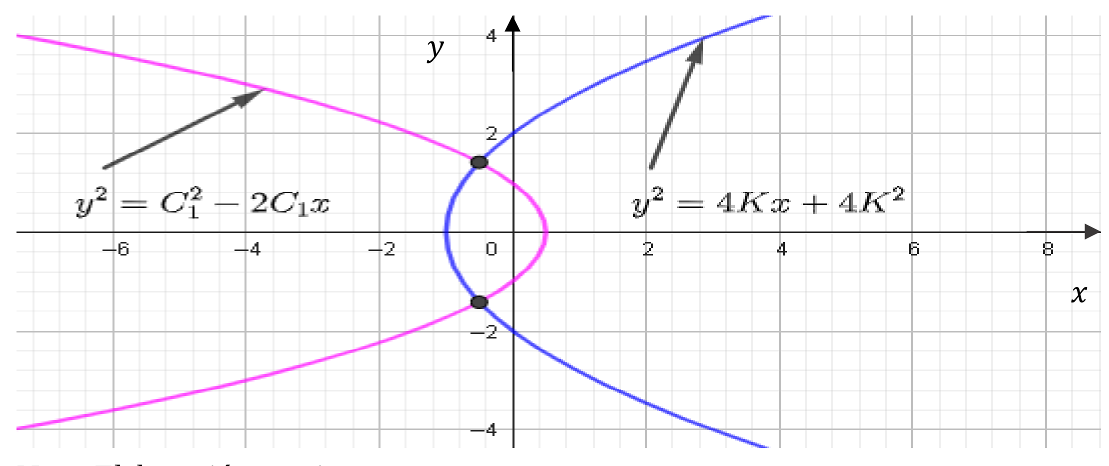
$y^2 = {C_1}^2 - 2C_1x$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$$\boldsymbol{y^2 = {C_1}^2 - 2C_1x}$$

Figura 20

Miembro de cada familia de curva cuando K=1 y C_1 =1.



Nota. Elaboración propia.

16. $y = \ln[\tan(x + \sin x + K)]$

Solución:

Despejamos el parámetro K, para luego eliminar cuando derivamos implícitamente la curva dada con respecto a x.

$$y = \ln[\tan(x + \sin x + K)]$$

$$e^y = \tan(x + \sin x + K)$$

$$\tan^{-1} e^y = x + \sin x + K$$

$$\tan^{-1} e^y - x - \sin x = K$$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$(\tan^{-1} e^y - x - \sin x)' = (K)'$$

$$(\tan^{-1} e^y)' - (x)' - (\sin x)' = 0$$

$\frac{e^y}{1+(e^y)^2}y' - 1 - \cos x = 0$

$\frac{e^y}{1+e^{2y}}y' = 1 + \cos x$

$e^y y' = (1 + \cos x)(1 + e^{2y})$

$y' = \frac{(1+\cos x)(1+e^{2y})}{e^y}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{(1+\cos x)(1+e^{2y})}{e^y}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{(1+\cos x)(1+e^{2y})}$, ED de variable separable.

$\frac{1+e^{2y}}{e^y}dy = -\frac{1}{1+\cos x}dx$

$\int \frac{1+e^{2y}}{e^y}dy = -\int \frac{1}{1+\cos x}dx + C$

$\int \left(\frac{1}{e^y} + \frac{e^{2y}}{e^y}\right)dy = -\int \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x}dx + C$

$\int (e^{-y} + e^y)\, dy = -\int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx + C$

$\int e^{-y}\, dy + \int e^y\, dy = -\int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx + C$

$-e^{-y} + e^y = -\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx + C$

$-\frac{1}{e^y} + e^y = -\int \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx + C$

$\frac{-1+e^{2y}}{e^y} = -\int \csc^2 x + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx + C$

$\frac{e^{2y}-1}{e^y} = -(-\cot x) - \frac{1}{\sin x} + C$

$\frac{e^{2y}-1}{e^y} = \cot x - \csc x + C$

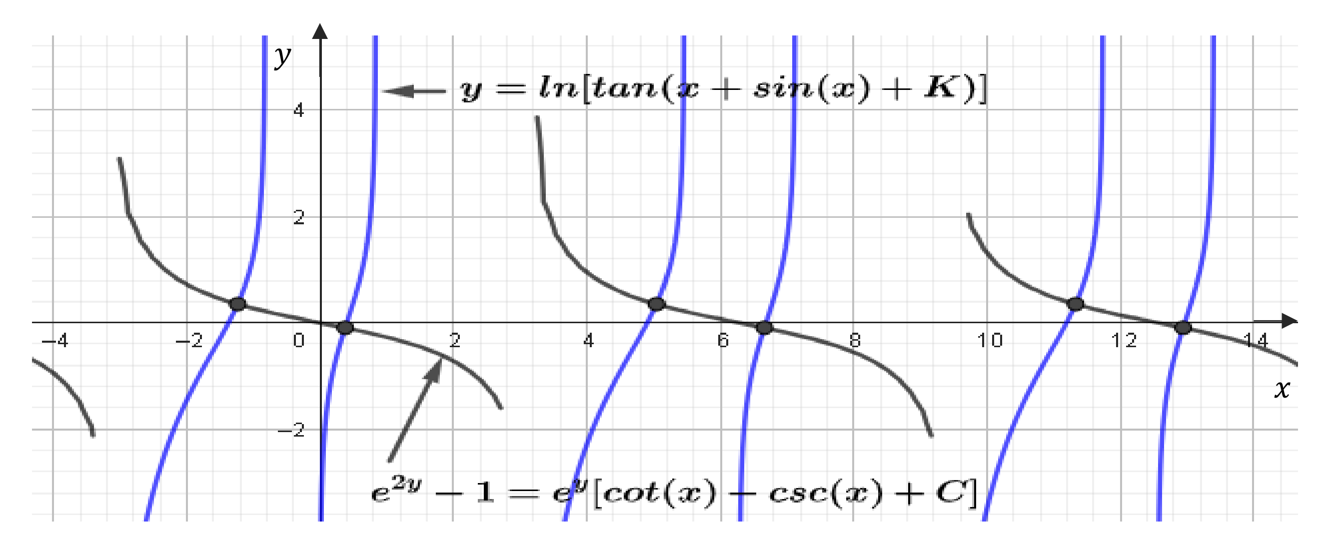
$e^{2y} - 1 = e^{y}(\cot x - \csc x + C)$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$\boldsymbol{e^{2y} - 1 = e^{y}(\cot x - \csc x + C)}$

Figura 21

Miembro de cada familia de curva cuando K=0 y C=0.



Nota. Se presenta únicamente una sección de la gráfica, destacando los puntos específicos donde ambas curvas se intersecan de forma ortogonal. Esta disposición de intersecciones ortogonales continúa extendiéndose indefinidamente a lo largo de la gráfica, tanto hacia la izquierda como hacia la derecha, lo que refleja la naturaleza continua y sin límites de ambas curvas. Elaboración propia.

17. Encuentre las trayectorias ortogonales a $x(x^2 + y^2) - 2Ky^2 = 0$. Determine aquel miembro particular de cada familia que pasa por (3,3).

Solución:

$x(x^2 + y^2) - 2Ky^2 = 0$

$x^3 + xy^2 = 2Ky^2$

$\frac{x^3+xy^2}{y^2} = 2K$

$\frac{x^3}{y^2} + \frac{xy^2}{y^2} = 2K$

$x^3y^{-2} + x = 2K$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$(x^3y^{-2} + x)' = (2K)'$

$(x^3y^{-2})' + (x)' = 0$

$(x^3)'y^{-2} + x^3(y^{-2})' + 1 = 0$

$3x^2y^{-2} + x^3(-2y^{-3})y' + 1 = 0$

$3x^2y^{-2} - 2x^3y^{-3}y' + 1 = 0$

$3x^2y^{-2} + 1 = 2x^3y^{-3}y'$

$2x^3y^{-3}y' = 3x^2y^{-2} + 1$

$\frac{2x^3y\prime}{y^3} = \frac{3x^2}{y^2} + 1$

$\frac{2x^3y\prime}{y^3} = \frac{3x^2+y^2}{y^2}$

$2x^3y' = y^3\left(\frac{3x^2+y^2}{y^2}\right)$

$2x^3y' = y(3x^2 + y^2)$

$2x^3y' = 3x^2y + y^3$

$y' = \frac{3x^2y+y^3}{2x^3}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{3x^2y+y^3}{2x^3}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{3x^2y+y^3}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$(3x^2y + y^3)dy = -2x^3dx$

$2x^3dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$

Comprobamos que la ED es homogénea.

$M(x, y) = 2x^3$ $N(x, y) = 3x^2y + y^3$

$M(tx, ty) = 2(tx)^3$ $N(x, y) = 3(tx)^2ty + (ty)^3$

$M(tx, ty) = 2t^3x^3$ $N(x, y) = 3t^2x^2ty + t^3y^3$

$M(tx, ty) = t^3(2x^3)$ $N(x, y) = 3t^3x^2y + t^3y^3$

$\boldsymbol{M(tx, ty) = t^3M(x, y)}$ $N(x, y) = t^3(3x^2y + y^3)$

$\boldsymbol{N(x, y) = t^3N(x, y)}$

Así, las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado 3.

Como $M(x, y)$ es de estructura más simple que $N(x, y)$, usamos el siguiente cambio de variable

$x = yv \quad \rightarrow \quad dx = vdy + ydv.$

$2(yv)^3(vdy + ydv) + (3(yv)^2y + y^3)dy = 0$

$2y^3v^3(vdy + ydv) + (3y^2v^2y + y^3)dy = 0$

$2y^3v^3(vdy + ydv) + (3y^3v^2 + y^3)dy = 0$

$2y^3v^3(vdy + ydv) + y^3(3v^2 + 1)dy = 0$

$\frac{2y^3v^3(vdy+ydv)+y^3(3v^2+1)dy}{y^3} = \frac{0}{y^3}; \quad y^3 \neq 0$

$\frac{y^3[2v^3(vdy+ydv)+(3v^2+1)dy]}{y^3} = 0$

$2v^3(vdy + ydv) + (3v^2 + 1)dy = 0$

$2v^4dy + 2v^3ydv + (3v^2 + 1)dy = 0$

$2v^4dy + (3v^2 + 1)dy + 2v^3ydv = 0$

$(2v^4 + 3v^2 + 1)dy + 2v^3ydv = 0$

$\frac{dy}{y} + \frac{2v^3}{2v^4+3v^2+1}dv = 0$

$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{2v^3}{2v^4+3v^2+1}dv = C$

$\ln y + \int \frac{2v^3}{(2v^2+1)(v^2+1)}dv = C$

$\ln y + \int \left(\frac{Av+B}{2v^2+1} + \frac{Cv+D}{v^2+1}\right)dv = C$

Fracciones parciales.

$\frac{2v^3}{(2v^2+1)(v^2+1)} = \frac{Av+B}{2v^2+1} + \frac{Cv+D}{v^2+1}$

$2v^3 = (Av + B)(v^2 + 1) + (Cv + D)(2v^2 + 1)$

$2v^3 = Av^3 + Av + Bv^2 + B + 2Cv^3 + Cv + 2Dv^2 + D$

$2v^3 = Av^3 + 2Cv^3 + Bv^2 + 2Dv^2 + Av + Cv + B + D$

$2v^3 = (A + 2C)v^3 + (B + 2D)v^2 + (A + C)v + B + D$

Comparamos coeficientes.

$$\begin{cases} A + 2C = 2 \\ B + 2D = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases}$$

Despejamos C de la ecuación (3).

$C = -A$, sustituyendo C en la ecuación (1).

$A + 2(-A) = 2$

$A - 2A = 2$

$-A = 2$

$\boldsymbol{A = -2}$

$C = -A$

$C = -(-2)$

$\boldsymbol{C = 2}$

Restamos la ecuación (2) y (4), así:

$B + 2D - B - D = 0$

$\boldsymbol{D = 0}$

Entonces $\boldsymbol{B = 0}$

Sustituyendo los valores en la integral, se obtiene:

$$\ln y + \int \left(\frac{-2v+0}{2v^2+1} + \frac{2v+0}{v^2+1}\right) dv = C$$

$$\ln y + \int \left(\frac{-2v}{2v^2+1} + \frac{2v}{v^2+1}\right) dv = C$$

$$\ln y - \int \frac{2v}{2v^2+1} dv + \int \frac{2v}{v^2+1} dv = C$$

$$\ln y - \frac{1}{2}\int \frac{4v}{2v^2+1} dv + \ln(v^2+1) = C$$

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln(2v^2+1) + \ln(v^2+1) = C$$

Sustituyendo $v = \frac{x}{y}$ en la ecuación.

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right) + \ln\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right) = C$$

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2}{y^2} + 1\right) + \ln\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = C$$

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2+y^2}{y^2}\right) + \ln\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right) = C$$

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln(2x^2+y^2) + \frac{1}{2}\ln y^2 + \ln(x^2+y^2) - \ln y^2 = C$$

$$\ln y - \ln(2x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{2}\ln y + \ln(x^2+y^2) - 2\ln y = C$$

$$\ln y - \ln\sqrt{2x^2+y^2} + \ln y + \ln(x^2+y^2) - 2\ln y = C$$

$$\ln(x^2+y^2) - \ln\sqrt{2x^2+y^2} = C$$

$$\ln\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} = C$$

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} = e^C$$

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} = C_1; \qquad C_1 = e^C$$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas son:

$$\boldsymbol{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} = C_1}$$

Determinemos aquel miembro particular de cada familia que pasa por (3,3) para:

$\frac{x^3+xy^2}{y^2} = 2K \qquad \wedge \qquad \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} = C_1$

Un miembro de la curva dada que pasa por (3,3).

$\frac{x^3+xy^2}{y^2} = 2K$

$\frac{3^3+3\cdot 3^2}{3^2} = 2K$

$\frac{3^3+3^3}{3^2} = 2K$

$\frac{2\cdot 3^3}{3^2} = 2K$

$2 \cdot 3 = 2K$

$6 = 2K \quad \rightarrow \quad 2K = 6.:$

$\frac{x^3+xy^2}{y^2} = 6$

$\boldsymbol{x^3 + xy^2 = 6y^2}$

Un miembro de la trayectoria ortogonal que pasa por (3,3).

$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} = C_1$

$\frac{3^2+3^2}{\sqrt{2\cdot 3^2+3^2}} = C_1$

$\frac{2\cdot 3^2}{\sqrt{3\cdot 3^2}} = C_1$

$\frac{2\cdot 3^2}{3\sqrt{3}} = C_1$

$\frac{2\cdot 3}{\sqrt{3}} = C_1$

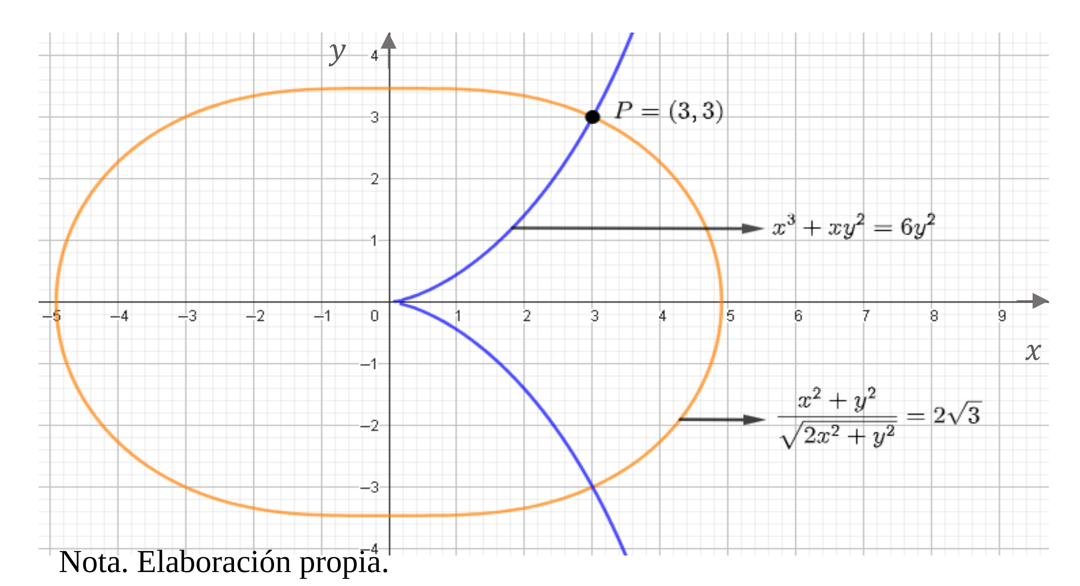
$\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{3} = C_1$

$2\sqrt{3} = C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 2\sqrt{3}$

$\boldsymbol{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} = 2\sqrt{3}}$

Figura 22

Miembro particular de cada familia de curva que pasa por (3,3).



Nota. Elaboración propia.

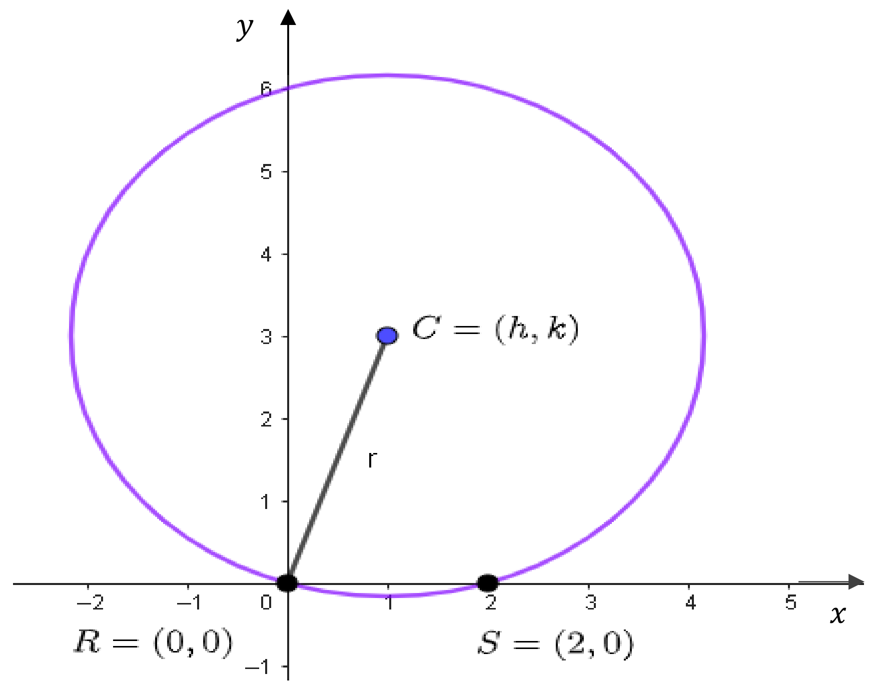
18. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencia que pasan por los puntos $R = (0,0)$ y $S = (2,0)$.

Solución:

Ubicamos los puntos R y S en el plano cartesiano, luego dibujamos la circunferencia que pase por dicho punto con centro (h, k). Como se muestra en la siguiente gráfica.

Figura 23

Gráfica de una circunferencia con parámetros.



Nota. Elaboración propia.

En la gráfica observamos que el centro está ubicado en el primer cuadrante, también se puede dibujar otra circunferencia que pase por R y S la cual el centro se ubica en el cuarto cuadrante. Pero con la gráfica que hemos hecho podemos hallar las familias de circunferencias que pase por P y Q.

Escribimos la ecuación de la circunferencia, cuyo centro no está en el origen.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Calculamos el radio de la circunferencia cuyos puntos son: $C = (h, k)$ y $R = (0,0)$.

Utilizamos la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0 - h)^2 + (0 - k)^2}$$

$$d = \sqrt{(-h)^2 + (-k)^2}$$

$$d = \sqrt{h^2 + k^2}$$

Entonces el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Reemplazamos r en la ecuación de la circunferencia, tenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = \left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2xh + \cancel{h^2} + y^2 - 2ky + \cancel{k^2} = \cancel{h^2} + \cancel{k^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2ky = 0 \quad (*)$$

Observamos que la ecuación (*) tiene dos parámetros h y k. Para eliminar un parámetro ya sea h o k debemos utilizar el punto por donde pasa dicha circunferencia que es R y S.

Para el punto $R = (0,0)$

Reemplazando en la ecuación (*), tenemos:

$$0^2 + 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot h - 2 \cdot 0 \cdot k = 0$$

$$0 + 0 - 0 - 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Se puede observar que no quedo ningún parámetro.

Para el punto $S = (2,0)$

Reemplazando en la ecuación (*), tenemos:

$$2^2 + 0^2 - 2 \cdot 2 \cdot h - 2 \cdot 0 \cdot k = 0$$

$$4 + 0 - 4h - 0 = 0$$

$$4 - 4h = 0$$

$$4 = 4h$$

$$4h = 4$$

$$h = \frac{4}{4} \quad \rightarrow \quad h = 1$$

Sustituyendo h en la ecuación (*).

$$x^2+y^2-2x(1)-2ky=0$$

$$x^2+y^2-2x-2ky=0$$

$$x^2+y^2-2x=2ky$$

Por lo tanto, las familias de circunferencias que pasa por R y S son:

$$\boldsymbol{x^2+y^2-2x=2ky} \quad (**)$$

Despejamos $2k$ de la ecuación (**).

$$\frac{x^2+y^2-2x}{y}=2k$$

Calculamos la pendiente de la recta tangente de la ecuación.

Consideremos $y'=\frac{dy}{dx}$.

$$\left(\frac{x^2+y^2-2x}{y}\right)'=(2k)'$$

$$\frac{y\left(x^2+y^2-2x\right)'-\left(x^2+y^2-2x\right)(y)'}{y^2}=0$$

$$y[(x^2)'+(y^2)'-(2x)']-(x^2+y^2-2x)y'=0\cdot y^2$$

$$y[2x+2yy'-2]-(x^2+y^2-2x)y'=0$$

$$2xy+2y^2y'-2y-(x^2+y^2-2x)y'=0$$

$$2y^2y'-(x^2+y^2-2x)y'=2y-2xy$$

$$(2y^2-x^2-y^2+2x)y'=2y-2xy$$

$$(y^2-x^2+2x)y'=2y-2xy$$

$$y'=\frac{2y-2xy}{y^2-x^2+2x} \qquad \text{(Pendiente de la recta tangente)}$$

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{2y-2xy}{y^2-x^2+2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2-x^2+2x}{2y-2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2-x^2+2x}{-y(2x-2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2+2x}{2y(x-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2y(x-1)} - \frac{x^2-2x}{2y(x-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(x-1)} - \frac{x^2-2x}{2(x-1)}y^{-1}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2(x-1)}y = -\frac{x^2-2x}{2(x-1)}y^{-1}$, ED de Bernoulli en "$y$" con $n = -1$.

Multiplicamos la ED por y.

$$y\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2(x-1)}y\right) = -\frac{x^2-2x}{2(x-1)}y^{-1}y$$

$$y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2(x-1)}yy = -\frac{x^2-2x}{2(x-1)}$$

$$y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2(x-1)}y^2 = -\frac{x^2-2x}{2(x-1)}$$

Sea:

$$\boldsymbol{v = y^2}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy}y^2$$

$$\frac{dv}{dy} = 2y$$

$$\frac{1}{2}dv = ydy$$

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = y\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2(x-1)}v = -\frac{x^2-2x}{2(x-1)}$

$2\left[\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2(x-1)}v = -\frac{x^2-2x}{2(x-1)}\right]$

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x-1}v = -\frac{x^2-2x}{x-1}$, ED lineal en v.

$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x-1}v + \frac{x^2-2x}{x-1} = 0$

$dv + \left[-\frac{1}{x-1}v + \frac{x^2-2x}{x-1}\right]dx = 0 \quad (\#)$

Multiplicamos **P** en la ED (#).

$\frac{1}{x-1}\left\{dv + \left[-\frac{1}{x-1}v + \frac{x^2-2x}{x-1}\right]dx\right\} = 0 \cdot \frac{1}{x-1}; \quad x \neq 1$

$\frac{1}{x-1}dv + \frac{1}{x-1}\left[-\frac{1}{x-1}v + \frac{x^2-2x}{x-1}\right]dx = 0$

$\frac{1}{x-1}dv - \frac{1}{(x-1)^2}vdx + \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx = 0$

$d\left(\frac{v}{x-1}\right) + \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx = d(C)$

$\int d\left(\frac{v}{x-1}\right) + \int \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx = \int d(C)$

$\frac{v}{x-1} + \int \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx = C$

$\frac{v}{x-1} + \left(-\frac{x^2-2x}{x-1} - \int\left(-\frac{1}{x-1}\cdot\right)2(x-1)dx\right) = C$

$\frac{v}{x-1} + \left(-\frac{x^2-2x}{x-1} + 2\int dx\right) = C$

$\frac{v}{x-1} + \left(-\frac{x^2-2x}{x-1} + 2x\right) = C$

$\frac{v}{x-1} - \frac{x^2-2x}{x-1} + 2x = C$

$\frac{v}{x-1} + \frac{-x^2+2x+2x(x-1)}{x-1} = C$

$\frac{v}{x-1} + \frac{-x^2+2x+2x^2-2x}{x-1} = C$

Factor integrante.

$f(x) = -\frac{1}{x-1}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int f(x)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int\left(-\frac{1}{x-1}\right)dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\int\frac{1}{x-1}dx}$

$\boldsymbol{P} = e^{-\ln(x-1)}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln(x-1)}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{x-1}$

Integración por partes.

$u = x^2 - 2x$

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x)$

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) - 2\frac{d}{dx}(x)$

$\frac{du}{dx} = 2x - 2$

$\frac{du}{dx} = 2(x-1)$

$du = 2(x-1)dx$

$dv = \frac{1}{(x-1)^2}dx$

$\int dv = \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$

$v = -\frac{1}{x-1}$

$$\frac{v}{x-1}+\frac{x^2}{x-1}=C$$

$$\frac{v+x^2}{x-1}=C$$

$v+x^2=C(x-1)$ (##)

Sustituyendo $v=y^2$ en la ecuación (##)

$y^2+x^2=C(x-1)$

$x^2+y^2-C(x-1)=0$

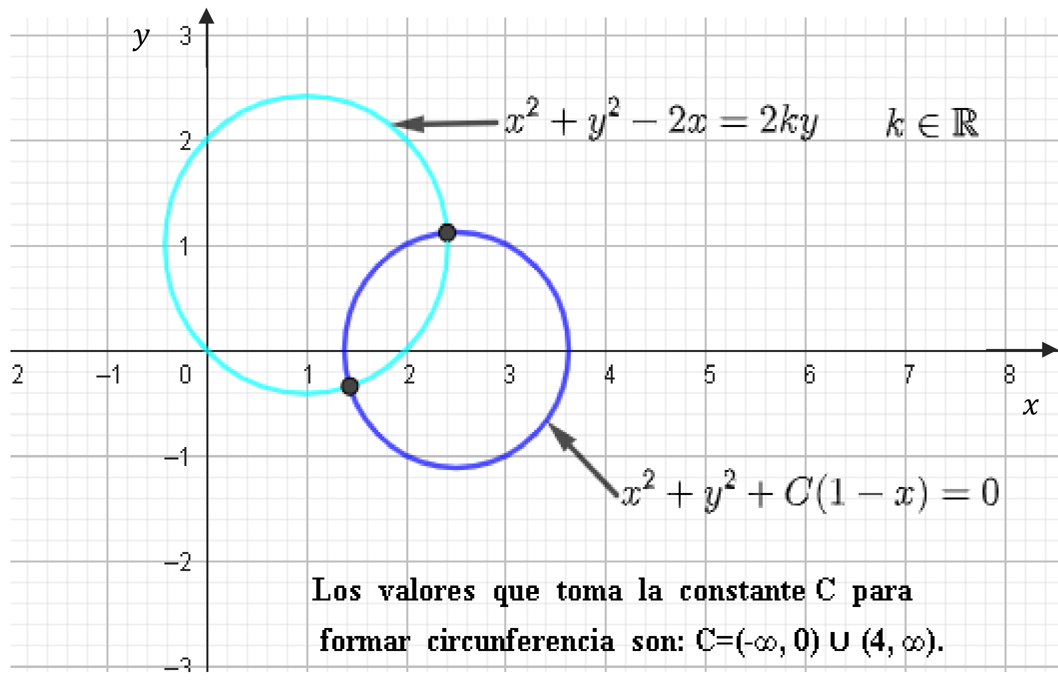
$x^2+y^2+C(1-x)=0$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de circunferencias son:

$\boldsymbol{x^2+y^2+C(1-x)=0}$

Figura 24

Miembro de cada familia de curva cuando k=1 y C=5.



Nota. Elaboración propia.

19. Hallar la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales a todas las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y cuyo centro está en la recta $y = x$.

Solución:

Sea:

$C = (h, k)$ centro de la circunferencia, como el centro está en la recta $y = x$, reemplazamos el punto del centro en la ecuación de la recta, se obtiene: $h = k$.

Ahora el nuevo centro de la circunferencia es: $C = (h, h)$, también se puede considerar el otro centro $C = (k, k)$.

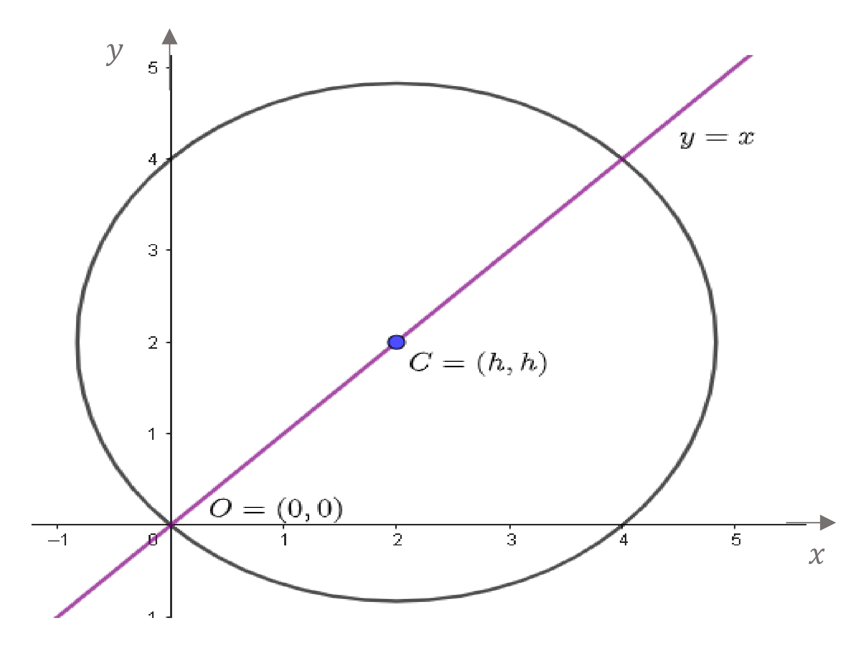
Por preferencia trabajaremos con la variable h.

Además, la circunferencia pasa por el origen $O = (0,0)$

Trazamos una familia de circunferencia que cumpla con las características del problema.

Figura 25

Familia de una circunferencia y la recta y=x.



Nota. Elaboración propia.

Calculamos el radio de la circunferencia cuyos puntos son $O = (0,0)$ y $C = (h.h)$.

Utilizamos la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(h - 0)^2 + (h - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{(h)^2 + (h)^2}$$

$$d = \sqrt{2h^2}$$

Entonces el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{2h^2}$

La ecuación de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Sustituyendo los datos en la ecuación, se obtiene:

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = \left(\sqrt{2h^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yh + h^2 = 2h^2$$

$$x^2 - 2xh + y^2 - 2yh + 2h^2 = 2h^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yh = 2h^2 - 2h^2$$

$$x^2 + y^2 - 2h(x + y) = 0$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2h(x + y)} \qquad (*)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 2h$$

Consideremos $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)' = (2h)'$$

$$\frac{(x + y)(x^2 + y^2)' - (x^2 + y^2)(x + y)'}{(x + y)^2} = 0$$

$$(x + y)[(x^2)' + (y^2)'] - (x^2 + y^2)[(x)' + (y)'] = 0 \cdot (x + y)^2$$

$(x+y)[2x+2yy'] - (x^2+y^2)[1+y'] = 0$

$2x(x+y) + (x+y)2yy' - (x^2+y^2) - (x^2+y^2)y' = 0$

$2x^2 + 2xy + (2xy+2y^2)y' - x^2 - y^2 - (x^2+y^2)y' = 0$

$(2xy+2y^2)y' - (x^2+y^2)y' + x^2 + 2xy - y^2 = 0$

$(2xy + 2y^2 - x^2 - y^2)y' = y^2 - x^2 - 2xy$

$(y^2 - x^2 + 2xy)y' = y^2 - x^2 - 2xy$

$y' = \frac{y^2-x^2-2xy}{y^2-x^2+2xy}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y^2-x^2-2xy}{y^2-x^2+2xy}}$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2-x^2+2xy}{y^2-x^2-2xy}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$(y^2-x^2-2xy)dy = -(y^2-x^2+2xy)dx$

$(y^2-x^2+2xy)dx + (y^2-x^2-2xy)dy = 0$

Verificamos si la ED es homogénea.

$M(x,y) = y^2 - x^2 + 2xy$ $N(x,y) = y^2 - x^2 - 2xy$

$M(tx,ty) = (ty)^2 - (tx)^2 + 2txty$ $N(tx,ty) = (ty)^2 - (tx)^2 - 2txty$

$M(tx,ty) = t^2y^2 - t^2x^2 + 2t^2xy$ $N(tx,ty) = t^2y^2 - t^2x^2 - 2t^2xy$

$M(tx,ty) = t^2(y^2 - x^2 + 2xy)$ $N(tx,ty) = t^2(y^2 - x^2 - 2xy)$

$\boldsymbol{M(tx,ty) = t^2M(x,y)}$ $\boldsymbol{N(tx,ty) = t^2N(x,y)}$

Así, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado 2.

Usamos el siguiente cambio de variable $y = xv \quad \rightarrow \quad dy = vdx + xdv$.

$$((xv)^2 - x^2 + 2xxv)dx + ((xv)^2 - x^2 - 2xxv)(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2v^2 - x^2 + 2x^2v)dx + (x^2v^2 - x^2 - 2x^2v)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^2(v^2 - 1 + 2v)dx + x^2(v^2 - 1 - 2v)(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{x^2(v^2 - 1 + 2v)dx + x^2(v^2 - 1 - 2v)(vdx + xdv)}{x^2} = \frac{0}{x^2}; \quad x^2 \neq 0$$

$$\frac{x^2[(v^2 - 1 + 2v)dx + (v^2 - 1 - 2v)(vdx + xdv)]}{x^2} = 0$$

$$(v^2 - 1 + 2v)dx + (v^2 - 1 - 2v)(vdx + xdv) = 0$$

$$(v^2 - 1 + 2v)dx + v(v^2 - 1 - 2v)dx + x(v^2 - 1 - 2v)dv = 0$$

$$(v^2 - 1 + 2v)dx + (v^3 - v - 2v^2)dx + x(v^2 - 1 - 2v)dv = 0$$

$$(v^2 - 1 + 2v + v^3 - v - 2v^2)dx + x(v^2 - 2v - 1)dv = 0$$

$$(v^3 - v^2 + v - 1)dx + x(v^2 - 2v - 1)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2 - 2v - 1}{v^3 - v^2 + v - 1}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v^2 - 2v - 1}{v^3 - v^2 + v - 1}dv = C$$

$$\ln x + \int \frac{v^2 - 2v - 1}{v^2(v - 1) + v - 1}dv = C$$

$$\ln x + \int \frac{v^2 - 2v - 1}{(v - 1)(v^2 + 1)}dv = C$$

$$\ln x + \int \left(\frac{A}{v - 1} + \frac{Bv + C}{v^2 + 1}\right)dv = C$$

Fracciones parciales.

$$\frac{v^2 - 2v - 1}{(v - 1)(v^2 + 1)} = \frac{A}{v - 1} + \frac{Bv + C}{v^2 + 1}$$

$$v^2 - 2v - 1 = A(v^2 + 1) + (Bv + C)(v - 1)$$

$v^2 - 2v - 1 = Av^2 + A + Bv^2 - Bv + Cv - C$

$v^2 - 2v - 1 = Av^2 + Bv^2 + Cv - Bv + A - C$

$v^2 - 2v - 1 = (A + B)v^2 + (C - B)v + A - C$

Comparando coeficientes, se obtiene:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C - B = -2 \\ A - C = -1 \end{cases}$$

Sumamos la ecuación (2) y (3), así:

$A + C - C - B = -1 - 2$

$A - B = -3$ (4)

Sumamos la ecuación (1) y (4), así:

$A + B + A - B = 1 - 3$

$2A = -2$

$A = \frac{-2}{2}$

$\boldsymbol{A = -1}$

$A + B = 1$

$-1 + B = 1$

$B = 1 + 1$

$\boldsymbol{B = 2}$

$C - B = -2$

$C - 2 = -2$

$C = -2 + 2$

$\boldsymbol{C = 0}$

Reemplazando los valores en la integral, se obtiene:

$$\ln x + \int \left(\frac{-1}{v - 1} + \frac{2v}{v^2 + 1}\right) dv = C$$

$$\ln x - \int \frac{1}{v - 1} dv + \int \frac{2v}{v^2 + 1} dv = C$$

$$\ln x - \ln(v - 1) + \ln(v^2 + 1) = C$$

$$\ln[x(v^2 + 1)] - \ln(v - 1) = C$$

$$\ln\left[\frac{x(v^2 + 1)}{v - 1}\right] = C$$

$$\frac{x(v^2 + 1)}{v - 1} = e^C$$

$$\frac{x(v^2+1)}{v-1} = C_1; \qquad C_1 = e^C$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$ en la ecuación.

$$\frac{x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)}{\frac{y}{x} - 1} = C_1$$

$$\frac{x\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)}{\frac{y-x}{x}} = C_1$$

$$\frac{xx\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)}{y-x} = C_1$$

$$\frac{x^2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)}{y-x} = C_1$$

$$\frac{x^2+y^2}{y-x} = C_1$$

$$x^2 + y^2 = C_1(y-x)$$

$$x^2 + y^2 - C_1(y-x) = 0$$

$$x^2 + y^2 + C_1(x-y) = 0$$

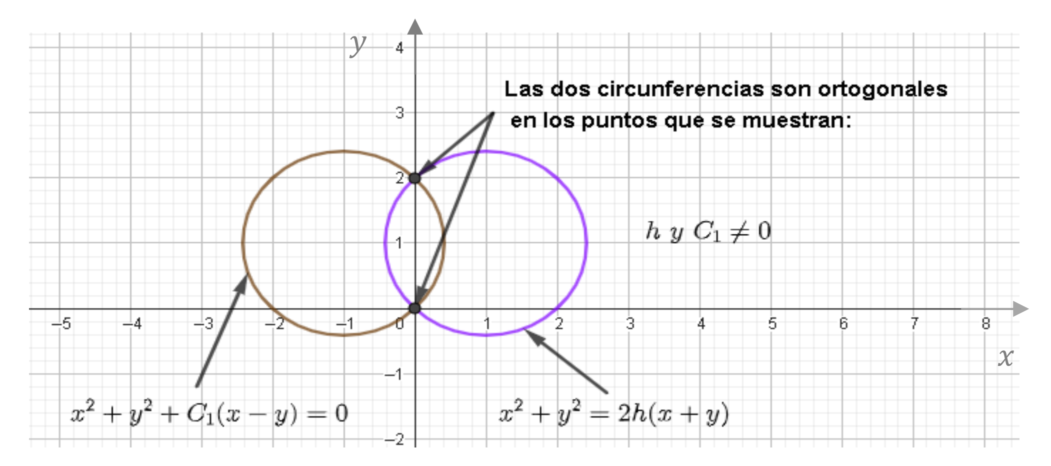
Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de circunferencias (*) es:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + C_1(x-y) = 0}$$

Las constantes h y C_1 deben ser distintas de cero; de lo contrario, únicamente se obtendrían puntos en lugar de una familia de circunferencias. Esto se debe a que valores nulos de h y C_1 limitan el radio de las circunferencias, colapsándolas en puntos en lugar de producir una serie continua de circunferencias en el plano.

Figura 26

Miembro de cada familia de curva cuando h=2 y C_1 =2.



Nota. Elaboración propia.

20. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencia que pasan por el origen y centro en el eje Y.

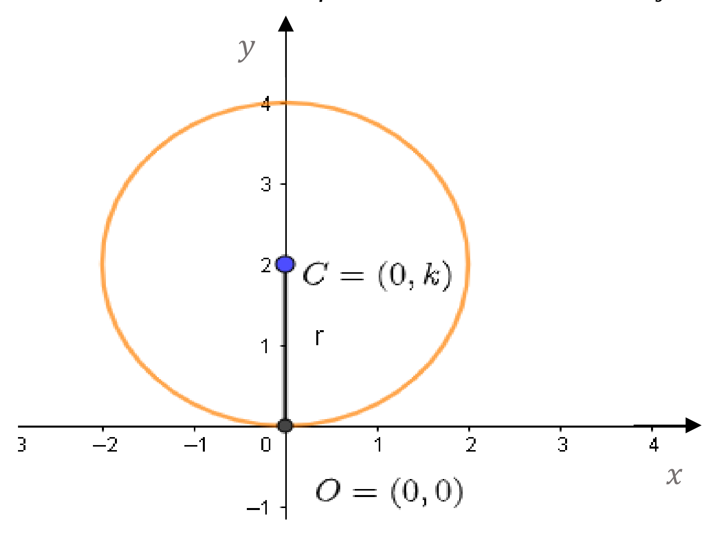
Solución:

Como el centro está en el eje Y, esto implica que el punto del centro es: $C = (0, k)$.

Además, el radio $r = k$, ya que el centro varía en el eje Y. Como se muestra en la figura.

Figura 27

Miembro de una circunferencia con centro en el eje Y.



Nota. Elaboración propia.

Ecuación de la circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, sustituyendo los datos, se obtiene:

$$(x-0)^2+(y-k)^2=k^2$$

$$(x)^2+y^2-2yk+k^2=k^2$$

$$x^2+y^2-2yk=k^2-k^2$$

$$x^2+y^2-2yk=0 \qquad (*)$$

$$x^2+y^2=2yk$$

$$\frac{x^2+y^2}{y}=2k$$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{y}=2k$$

$$x^2y^{-1}+y=2k$$

Consideremos $y'=\frac{dy}{dx}$.

$$(x^2y^{-1}+y)'=(2k)'$$

$$(x^2y^{-1})'+y'=0$$

$$(x^2)y^{-1}+x^2(y^{-1})'+y'=0$$

$$2xy^{-1}+x^2(-y^{-2})y'+y'=0$$

$$\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}y'+y'=0$$

$$\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)y'=-\frac{2x}{y}$$

$$\left(\frac{y^2-x^2}{y^2}\right)y'=-\frac{2x}{y}$$

$$y'=-\frac{2x}{y}\left(\frac{y^2}{y^2-x^2}\right)$$

$y' = -\frac{2xy}{y^2-x^2}$ (Pendiente de la recta tangente)

Ahora calculamos la pendiente de la trayectoria ortogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{-\frac{2xy}{y^2 - x^2}}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$ (Pendiente de la trayectoria ortogonal)

$$2xydy = (y^2 - x^2)dx$$

$$-(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0$$

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0 \quad (**)$$

Verificamos la exactitud de la ED.

$M(x, y) = x^2 - y^2$ $N(x, y) = 2xy$

$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2)$ $\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y\frac{\partial}{\partial x}(x)$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 - 2y$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y(1)$

$\boldsymbol{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2y}$ $\boldsymbol{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y}$

Así, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Por lo tanto, la ED no es exacta.

Buscamos un factor integrante **P**.

¿**P** será función sólo de x?

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{2xy}[-2y - 2y]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{2xy}[-4y]$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=-\frac{2}{x}$$

Consideremos $f(x)=-\frac{2}{x}$.

$$\boldsymbol{P}=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-2\int\frac{1}{x}dx}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{-2\ln x}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln x^{-2}}$$

$$\boldsymbol{P}=x^{-2}$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{x^2}$$

Multiplicamos **P** en la ED (**).

$$\frac{1}{x^2}[(x^2-y^2)dx+2xydy]=\frac{1}{x^2}\cdot 0;\quad x^2\neq 0$$

$$\frac{1}{x^2}(x^2-y^2)dx+\frac{1}{x^2}\cdot 2xydy=0$$

$$\left(\frac{1}{x^2}x^2-\frac{1}{x^2}y^2\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$$

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$$

$$dx-\frac{y^2}{x^2}dx+\frac{2y}{x}dy=0$$

$$dx+\left(-\frac{y^2}{x^2}dx+\frac{2y}{x}dy\right)=0$$

$$d(x) + d\left(\frac{y^2}{x}\right) = d(C)$$

$$d\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = d(C)$$

$$d\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = d(C)$$

$$\int d\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = \int d(C)$$

$$x + \frac{y^2}{x} = C$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = C$$

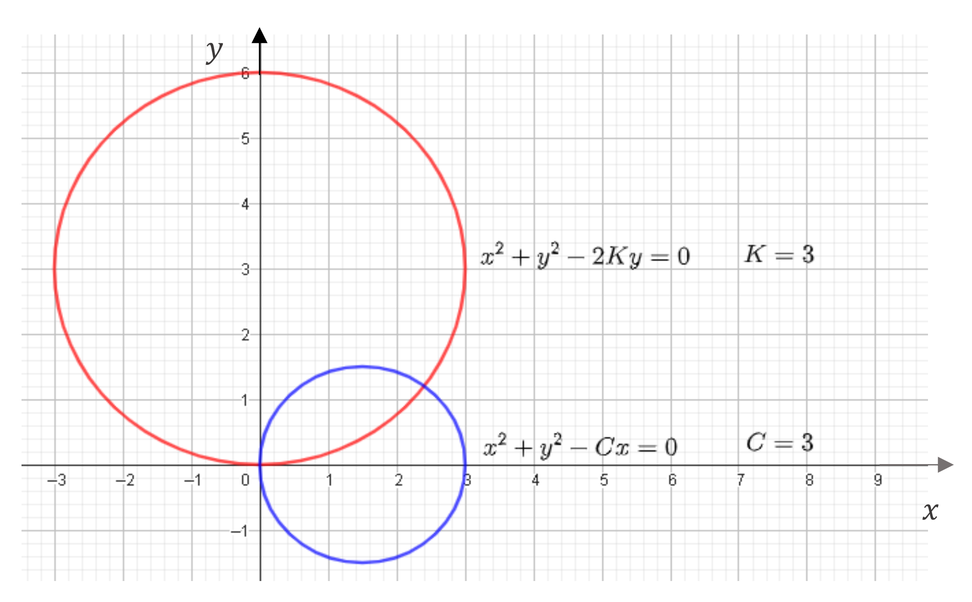
$$x^2 + y^2 = Cx$$

Luego, las familias de trayectorias ortogonales a las familias de circunferencias (*) es:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = Cx}$$

Figura 28

Miembro de cada familia de curva cuando K=3 y C=3.



Nota. Elaboración propia.

3.11.2 Problemas de mezclas

• Resolver los siguientes problemas de mezclas, responder en frase completa las preguntas que se hacen en las misma.

1. Un gran depósito está lleno con 500 galones de agua pura. Una salmuera que contiene 2 libras de sal por galón se bombea al tanque a razón de 5 galones por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez, determine:

a. La cantidad de sal que hay en el depósito en cualquier instante $t \geq 0$.

b. La cantidad de sal en el depósito después de 20 minutos.

c. La cantidad de sal en el depósito después de mucho tiempo.

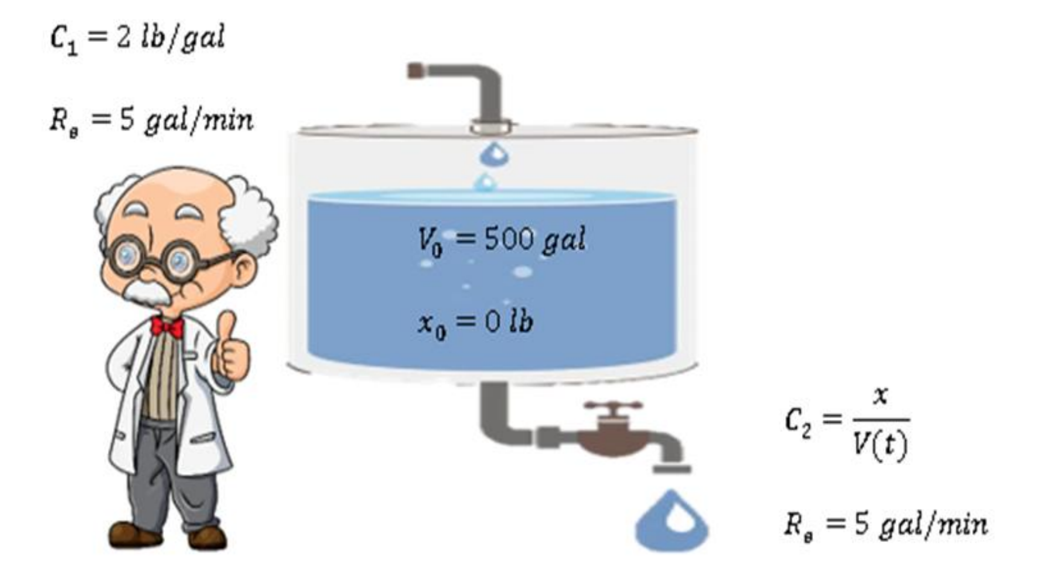
d. ¿Qué tiempo que debe transcurrir para que haya 30 libras de sal en el depósito?

Resolución:

Representamos los datos en el depósito de agua como se muestra en la figura 29.

Figura 29

Mezcla de salmuera en el depósito con agua.



Nota. Elaboración propia.

Inicialmente el depósito está con 500 gal de agua pura, por lo que en el instante $t = 0$, el depósito no contiene sal, es decir, $x_0 = 0$. A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 0$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal (lb) que hay en el depósito en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 500 + (5 - 5)t$

$V(t) = 500 + (0)t$

$V(t) = 500$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{500}\frac{lb}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t)$ es el mismo que el volumen inicial, esto se debe a que el flujo de entrada es el mismo que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana galones de agua en el depósito. Entonces el volumen permanece constante.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal en el tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$

$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$

$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$

$\frac{dx}{dt} = (5\ gal/min)(2lb/gal) - (5\ gal/min)\left(\frac{x}{500}\ lb/gal\right)$

$\frac{dx}{dt} = 10\frac{lb}{min} - \frac{5x}{500}\frac{lb}{min}$

$\frac{dx}{dt} = 10\frac{lb}{min} - \frac{x}{100}\frac{lb}{min}$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{x}{100}$; $x(0) = 0$

$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{100}x = 10$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente t.

$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{100}x - 10 = 0$

$dx + \left(\frac{1}{100}x - 10\right)dt = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ecuación (*).

$e^{\frac{1}{100}t}\left[dx + \left(\frac{1}{100}x - 10\right)dt = 0\right]$

$e^{\frac{1}{100}t}dx + e^{\frac{1}{100}t}\left(\frac{1}{100}x - 10\right)dt = e^{\frac{1}{100}t} \cdot 0$

$e^{\frac{1}{100}t}dx + \frac{1}{100}e^{\frac{1}{100}t}xdt - 10e^{\frac{1}{100}t}dt = 0$

$d\left(xe^{\frac{1}{100}t}\right) - d\left(1000e^{\frac{1}{100}t}\right) = d(K)$

$d\left(xe^{\frac{1}{100}t} - 1000e^{\frac{1}{100}t}\right) = d(K)$

$\int d\left(xe^{\frac{1}{100}t} - 1000e^{\frac{1}{100}t}\right) = \int d(K)$

$xe^{\frac{1}{100}t} - 1000e^{\frac{1}{100}t} = K$, solución general de la ED (*).

Determinemos la solución particular de la ED para $t = 0$ y $x = 0$, tenemos:

$0 \cdot e^{\frac{1}{100}\cdot 0} - 1000e^{\frac{1}{100}\cdot 0} = K$

$0 - 1000e^{0} = K$

$-1000 \cdot 1 = K$

Factor integrante.

$x(t) = \frac{1}{100}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{100}dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{100}\int dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{100}t}$

$-1000 = K$

$K = -1000$

Despejando x, tenemos:

$xe^{\frac{1}{100}t} - 1000e^{\frac{1}{100}t} = -1000$

$xe^{\frac{1}{100}t} = 1000e^{\frac{1}{100}t} - 1000$

$x = \frac{1000e^{\frac{1}{100}t} - 1000}{e^{\frac{1}{100}t}}$

$x = \frac{1000e^{\frac{1}{100}t}}{e^{\frac{1}{100}t}} - \frac{1000}{e^{\frac{1}{100}t}}$

$x = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}$

Luego, la cantidad de sal (lb) que hay en el depósito después de t (minutos) es:

$\boldsymbol{x(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}}$

Respondiendo las preguntas.

a. La cantidad de sal que hay en el depósito en cualquier instante $t \geq 0$.

$\boldsymbol{x(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}}$

b. La cantidad de sal en el depósito después de 20 minutos.

$t = 20\, min$, $x(t) =$?

$x(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}$

$x(20) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}20}$

$x(20) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{5}}$

$x(20) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{5}}$

$\boldsymbol{x(20) \approx 181{,}27\ lb\ \ de\ sal}$

c. La cantidad de sal en el depósito después de mucho tiempo.

Para hallar la cantidad de sal después de mucho tiempo la podemos denotar y calcular como sigue:

$$x(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 1000 - \lim_{t\to\infty} 1000e^{-\frac{1}{100}t}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1000 - \lim_{t\to\infty} \frac{1000}{e^{\frac{1}{100}t}}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1000 - \frac{\lim_{t\to\infty} 1000}{\lim_{t\to\infty} e^{\frac{1}{100}t}}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1000 - \frac{1000}{\infty}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1000 - 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} x(t) = 1000\ lb\ de\ sal}$$

d. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que haya $30\ lb$ de sal en el depósito?

$t = ?,\ x = 30\ lb$

$$x(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}$$

$$30 = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}$$

$$1000e^{-\frac{1}{100}t} = 1000 - 30$$

$$1000e^{-\frac{1}{100}t} = 970$$

$$e^{-\frac{1}{100}t} = \frac{970}{1000}$$

$$\ln e^{-\frac{1}{100}t} = \ln\frac{970}{1000}$$

$-\frac{1}{100}t\ln e = \ln\frac{970}{1000}$

$-\frac{1}{100}t \cdot 1 = \ln\frac{970}{1000}$

$-\frac{1}{100}t = \ln\frac{970}{1000}$

$t = -100\ln\frac{970}{1000}$

$\boldsymbol{t \approx 3{,}04}$

Para que haya 30 lb de sal en el depósito debe transcurrir aproximadamente 3,04 minutos.

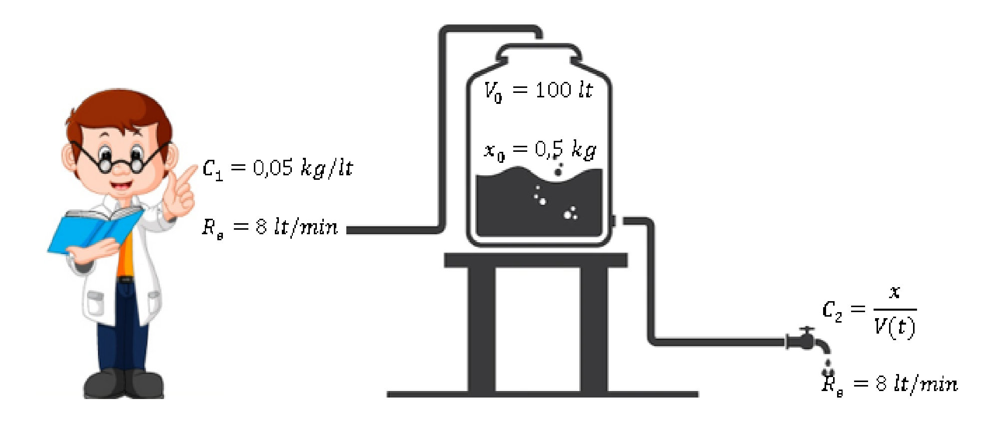
2. Una solución salina entra a una razón constante de 8 litros por minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 100 litros de solución salina en que se había disuelto 0,5 kilogramos de sal. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque con la misma razón. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0,05 kilogramos por litro, determine la masa de sal en el tanque después de t minutos. ¿Cuándo llegará la concentración de sal en el tanque a 0,02 kilogramos por litro?

Resolución:

Representamos los datos en el tanque como se muestra en la figura 30.

Figura 30

Tanque con solución salina.



Nota. Elaboración propia.

Inicialmente el tanque está con $100\ lt$ de solución salina, por lo que en el instante $t = 0\ min$, el tanque contiene sal, es decir, $x_0 = 0{,}5$. A partir de este análisis determinamos la condición inicial de problema: $x(0) = 0{,}5$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal (kg) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 100 + (8\ - 8)t$

$V(t) = 100 + (0)t$

$V(t) = 100$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{100}\frac{kg}{lt}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t)$ es el mismo que el volumen inicial, esto se debe a que el flujo de entrada es el mismo que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana litros de agua en el tanque. Entonces el volumen permanece constante.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal en el tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$\frac{dx}{dt} = (8\ lt/min)(0{,}05\ kg/lt) - (8\ lt/min)\left(\frac{x}{100}\ kg/lt\right)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}\frac{kg}{min} - \frac{8x}{100}\frac{kg}{min}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}\frac{kg}{min} - \frac{2x}{25}\frac{kg}{min}$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5} - \frac{2x}{25}$; $x(0) = 0{,}5$

$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{25}x = \frac{2}{5}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente t.

$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{25}x - \frac{2}{5} = 0$

$dx + \left(\frac{2}{25}x - \frac{2}{5}\right)dt = 0$ (*)

Factor integrante.

$x(t) = \frac{2}{25}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{2}{25}dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{2}{25}\int dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{2}{25}t}$

Multiplicamos **P** en la ecuación (*).

$e^{\frac{2}{25}t}\left[dx + \left(\frac{2}{25}x - \frac{2}{5}\right)dt = 0\right]$

$e^{\frac{2}{25}t}dx + e^{\frac{2}{25}t}\left(\frac{2}{25}x - \frac{2}{5}\right)dt = e^{\frac{2}{25}t} \cdot 0$

$e^{\frac{2}{25}t}dx + \frac{2}{25}e^{\frac{2}{25}t}xdt - \frac{2}{5}e^{\frac{2}{25}t}dt = 0$

$d\left(xe^{\frac{2}{25}t}\right) - d\left(5e^{\frac{2}{25}t}\right) = d(K)$

$d\left(xe^{\frac{2}{25}t} - 5e^{\frac{2}{25}t}\right) = d(K)$

$\int d\left(xe^{\frac{2}{25}t} - 5e^{\frac{2}{25}t}\right) = \int d(K)$

$xe^{\frac{2}{25}t} - 5e^{\frac{2}{25}t} = K$, solución general de la ED (*).

Determinemos la solución particular de la ED para $t = 0$ y $x = 0{,}5$, tenemos:

$0{,}5 \cdot e^{\frac{2}{25}\cdot 0} - 5e^{\frac{2}{25}\cdot 0} = K$

$0{,}5 \cdot e^{0} - 5e^{0} = K$

$0{,}5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = K$

$0{,}5 - 5 = K$

$-4{,}5 = K$

$K = -4{,}5$

Despejando x, tenemos:

$xe^{\frac{2}{25}t} - 5e^{\frac{2}{25}t} = -4{,}5$

$xe^{\frac{2}{25}t} = 5e^{\frac{2}{25}t} - 4{,}5$

$x = \frac{5e^{\frac{2}{25}t} - 4{,}5}{e^{\frac{2}{25}t}}$

$x = \frac{5e^{\frac{2}{25}t}}{e^{\frac{2}{25}t}} - \frac{4{,}5}{e^{\frac{2}{25}t}}$

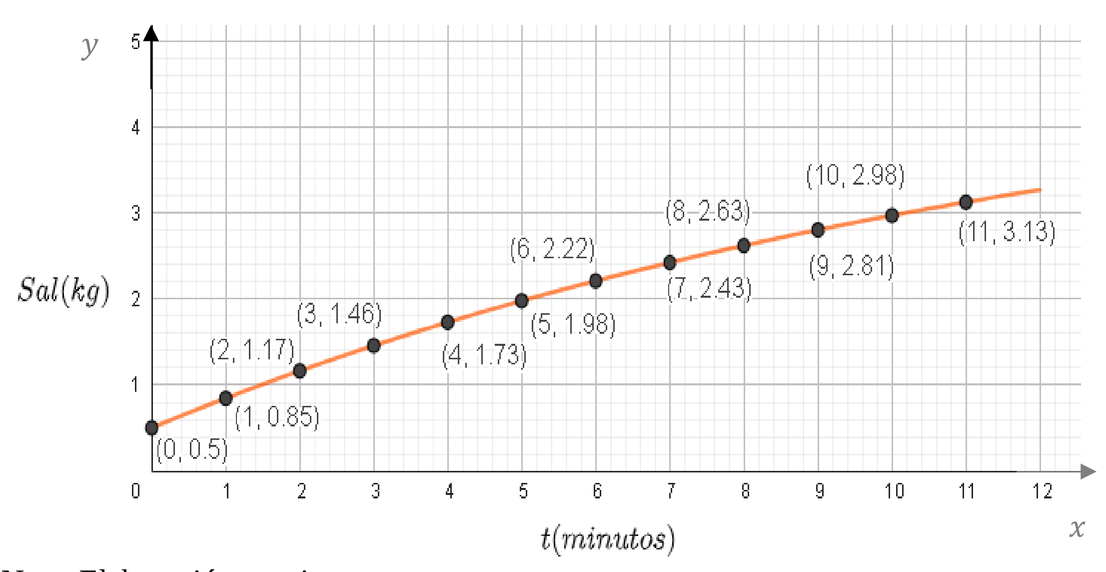
$x = 5 - 4{,}5e^{-\frac{2}{25}t}$

Luego, la cantidad de sal (kg) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$\boldsymbol{x(t) = 5 - 4{,}5e^{-\frac{2}{25}t}}$

Figura 31

Cantidad de sal en instante t para los primeros once minutos.



Nota. Elaboración propia.

¿Cuándo llegará la concentración de sal en el tanque a $0{,}02\ kg/lt$?

La concentración de soluto en el tanque en cualquier instante de tiempo t, viene dada por la ecuación: $C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$.

$C(t) = \frac{5-4{,}5e^{-\frac{2}{25}t}}{100}$, sustituyendo $0{,}02\ kg/lt$ en la ecuación, tenemos:

$$0{,}02 = \frac{5-4{,}5e^{-\frac{2}{25}t}}{100}$$

$$(0{,}02)(100) = 5-4{,}5e^{-\frac{2}{25}t}$$

$$2 = 5-4{,}5e^{-\frac{2}{25}t}$$

$$4{,}5e^{-\frac{2}{25}t} = 5-2$$

$$4{,}5e^{-\frac{2}{25}t} = 3$$

$$e^{-\frac{2}{25}t} = \frac{3}{4{,}5}$$

$$\ln e^{-\frac{2}{25}t} = \ln\frac{3}{4{,}5}$$

$$-\frac{2}{25}t\ln e = \ln\frac{3}{4{,}5}$$

$$-\frac{2}{25}t\cdot 1 = \ln\frac{3}{4{,}5}$$

$$-\frac{2}{25}t = \ln\frac{3}{4{,}5}$$

$$t = -\frac{25}{2}\ln\frac{3}{4{,}5}$$

$$\boldsymbol{t \approx 5{,}07}$$

La concentración de sal en el tanque a $0{,}02\ kg/lt$ llegará aproximadamente a $5{,}07$ minutos.

3. Un tanque con capacidad para 500 galones contiene inicialmente 10 libras de sal disueltas en 200 galones de agua. Se bombea al tanque salmuera que contiene 2 libras por galón a razón de 4 galones por minuto y se permite que la mezcla salga del tanque a razón de 3 galones por minuto.

a. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque después de t minutos?

b. ¿Cuál es la concentración de sal después de una hora?

c. ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?

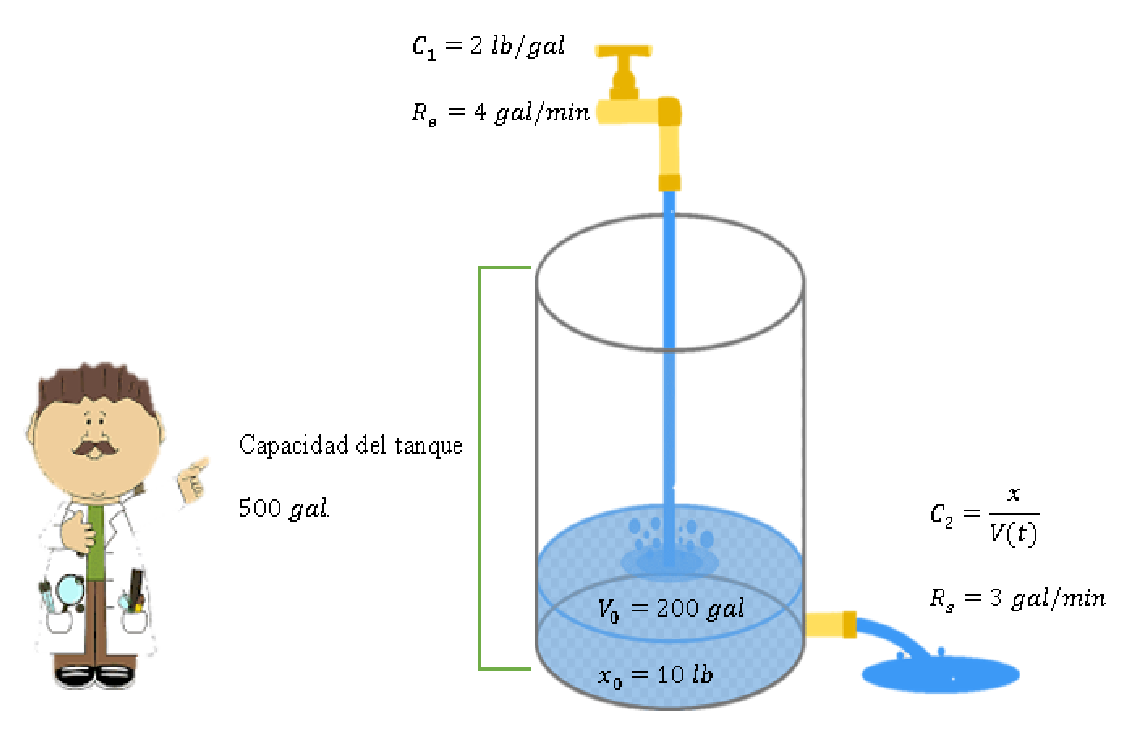
d. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando se llena?

Resolución:

Representamos los datos en el tanque como se muestra en la figura 32.

Figura 32

Tanque con sal.



Nota. Elaboración propia.

Inicialmente el tanque está con $200\ gal$ de agua, por lo que en el instante $t = 0$, el tanque contiene sal, es decir, $x_0 = 10$. A partir de este análisis determinamos la condición inicial de problema: $x(0) = 10$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (4 - 3)t$

$V(t) = 200 + (1)t$

$V(t) = 200 + t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{(200 + t)} \frac{lb}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 200 + t$, esto se debe a que el flujo de entrada es mayor que el flujo de salida; por lo que se gana un galón de agua en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es mayor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal en el tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$

$$\frac{dx}{dt} = (4\ gal/min)(2\ lb/gal) - (3\ gal/min)\left(\frac{x}{200+t}\ lb/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 8\frac{lb}{min} - \frac{3x}{(200+t)}\frac{lb}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$\frac{dx}{dt} = 8 - \frac{3x}{200+t}$; $x(0) = 10$

$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{200+t}x = 8$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente t.

$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{200+t}x - 8 = 0$

$dx + \left(\frac{3}{200+t}x - 8\right)dt = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ecuación (*).

$(200+t)^3\left[dx + \left(\frac{3}{200+t}x - 8\right)dt = 0\right]$

$$(200+t)^3 dx + (200+t)^3\left(\frac{3}{200+t}x - 8\right)dt = (200+t)^3 \cdot 0$$

$(200+t)^3 dx + \left[\frac{3(200+t)^3}{200+t}x - 8(200+t)^3\right]dt = 0$

$(200+t)^3 dx + [3(200+t)^2 x - 8(200+t)^3]dt = 0$

$(200+t)^3 dx + 3(200+t)^2 x dt - 8(200+t)^3 dt = 0$

$d[x(200+t)^3] - d[2(200+t)^4] = d(K)$

$d[x(200+t)^3 - 2(200+t)^4] = d(K)$

$\int d[x(200+t)^3 - 2(200+t)^4] = \int d(K)$

$x(200+t)^3 - 2(200+t)^4 = K$

$x(200+t)^3 - 2(200+t)^4 = K$, solución general de la ED (*).

Determinemos la solución particular para $t = 0$ y $x = 10$, tenemos:

$10(200+0)^3 - 2(200+0)^4 = K$

Factor integrante.

$x(t) = \frac{3}{200+t}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{3}{200+t}dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{3\int \frac{1}{200+t}dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{3\ln(200+t)}$

$\boldsymbol{P} = e^{\ln(200+t)^3}$

$\boldsymbol{P} = (200+t)^3$

$10(200)^3 - 2(200)^4 = K$

$(200)^3(10 - 2 \cdot 200) = K$

$(200)^3(10 - 400) = K$

$(200)^3(-390) = K$

$-390(200)^3 = K$

$K = -390(200)^3$

Despejando x, tenemos:

$x(200 + t)^3 - 2(200 + t)^4 = -390(200)^3$

$x(200 + t)^3 = 2(200 + t)^4 - 390(200)^3$

$x = \frac{2(200+t)^4 - 390(200)^3}{(200+t)^3}$

$x = \frac{2(200+t)^4}{(200+t)^3} - \frac{390(200)^3}{(200+t)^3}$

$x = 2(200 + t) - 390\left(\frac{200}{200+t}\right)^3$

Luego, la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$\boldsymbol{x(t) = 2(200 + t) - 390\left(\frac{200}{200+t}\right)^3}$

Respondiendo las preguntas.

a. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque después de t minutos?

La cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos es:

$\boldsymbol{x(t) = 2(200 + t) - 390\left(\frac{200}{200+t}\right)^3}$.

b. ¿Cuál es la concentración de sal después de una hora?

La concentración de soluto en el tanque en cualquier instante de tiempo t, viene dada por la ecuación: $C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$.

$$C(t)=\frac{2(200+t)-390\left(\frac{200}{200+t}\right)^3}{200+t}$$

$$C(60)=\frac{2(200+60)-390\left(\frac{200}{200+60}\right)^3}{200+60}$$

$$C(60)=\frac{2(260)-390\left(\frac{200}{260}\right)^3}{260}$$

$$\boldsymbol{C(60)\approx 1,32}$$

Observación: El tiempo que se está trabajando en el problema es el minuto, por lo que nos pide la concentración de sal después de una hora. Sabemos que: $1\ h=60\ min$.

La concentración de sal después de una hora es de aproximadamente $1,32\ lb/gal$.

c. ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?

Para saber cuándo se llena el tanque debemos considerar la capacidad de esta, que es de $500\ gal$.

Luego tenemos la siguiente ecuación del volumen en función del tiempo que es:

$$V(t)=200+t$$

$$500=200+t$$

$$500-200=t$$

$$300=t$$

$$t=300$$

Para saber la cantidad de sal en $t=300\ min$, tenemos la ecuación:

$$x(t)=2(200+t)-390\left(\frac{200}{200+t}\right)^3$$

$$x(300)=2(200+300)-390\left(\frac{200}{200+300}\right)^3$$

$$x(300)=2(500)-390\left(\frac{200}{500}\right)^3$$

$$x(300)=1000-390\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$x(300)=1000-390\cdot\frac{8}{125}$$

$$x(300)=1000-\frac{3120}{125}$$

$x(300) = \frac{125000-3120}{125}$

$x(300) = \frac{121880}{125}$

$\boldsymbol{x(300) = 975{,}04}$

Cuando el tanque se llene habrá $975{,}04\ lb\ de\ sal$.

d. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando se llena?

En la pregunta anterior se calculó en qué tiempo se llena el tanque que fue de $t = 300\ min$, para luego calcular la cantidad de sal en ese instante.

A partir de $t = 300\ min$ es donde se llena el tanque, por lo tanto, podemos calcular la concentración en ese instante.

$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$

$C(t) = \frac{2(200+t)-390\left(\frac{200}{200+t}\right)^3}{200+t}$

$C(300) = \frac{2(200+300)-390\left(\frac{200}{200+300}\right)^3}{200+300}$

$C(300) = \frac{2(500)-390\left(\frac{200}{500}\right)^3}{500}$

$C(300) = \frac{1000-390\left(\frac{2}{5}\right)^3}{500}$

$C(300) = \frac{1000-390\cdot\frac{8}{125}}{500}$

$C(300) = \frac{1000-\frac{3120}{125}}{500}$

$C(300) = \frac{\frac{125000-3120}{125}}{500}$

$C(300) = \frac{\frac{121880}{125}}{500}$

$C(300) = \frac{121880}{(125)(500)}$

$\boldsymbol{C(300) \approx 1,95}$

Cuando se llene el tanque la concentración de sal es aproximadamente 1,95 lb/gal.

4. Un tanque de 200 litros inicialmente se encuentra lleno de líquido en el que se han disuelto 40 gramos de una cierta sustancia química. El líquido que contiene 50 gramos por litro de esa sustancia entra al tanque a razón de 5 litros por minuto. La mezcla se conserva uniforme mediante agitación y estando bien agitada sale a razón de 7 litros por minuto, determine:

a. La cantidad de sustancia química que hay en el tanque después de t minutos.

b. La concentración de la sustancia química en el instante t.

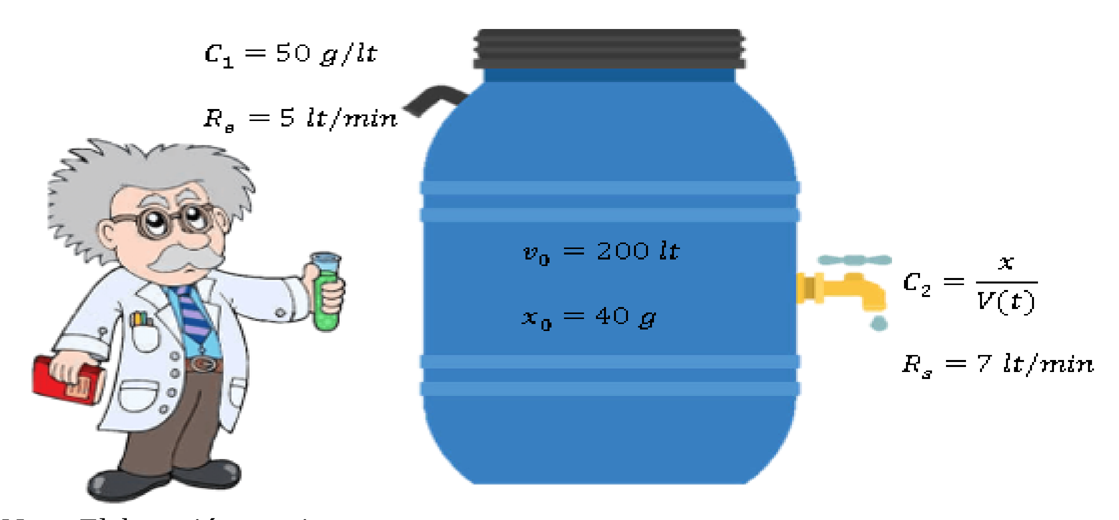
c. ¿Qué cantidad de la sustancia química habrá en el tanque cuando contenga el 50% de su contenido?

Resolución:

Representamos los datos en el tanque como se muestra en la figura 33.

Figura 33

Tanque con sustancia química.



Nota. Elaboración propia.

Inicialmente el tanque está con $200\ lt$, por lo que en el instante $t = 0$, el tanque contiene sustancia química, es decir, $x_0 = 40$. A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 40$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sustancia química (g) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (5 - 7)t$

$V(t) = 200 + (-2)t$

$V(t) = 200 - 2t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{(200 - 2t)} \frac{g}{lt}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 200 - 2t$, esto se debe a que el flujo de entrada es menor que el flujo de salida; por lo que se pierde 2 litros de líquido en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es menor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sustancia química en el tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (5\ lt/min)(50\ g/lt) - (7\ lt/min)\left(\frac{x}{200-2t}\ g/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 250\frac{g}{min} - \frac{7x}{(200-2t)}\frac{g}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = 250 - \frac{7x}{200-2t}\ ;\ \ x(0) = 40$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{7}{200-2t}x = 250$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente t.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{7}{200-2t}x - 250 = 0$$

$$dx + \left(\frac{7}{200-2t}x - 250\right)dt = 0\ \ (*)$$

Multiplicamos **P** en la ecuación (*).

$$(200-2t)^{-\frac{7}{2}}\left[dx + \left(\frac{7}{200-2t}x - 250\right)dt = 0\right]$$

$$(200-2t)^{-\frac{7}{2}}dx + (200-2t)^{-\frac{7}{2}}\left[\frac{7}{200-2t}x - 250\right]dt = 0$$

$$(200-2t)^{-\frac{7}{2}}dx + \left[(200-2t)^{-\frac{7}{2}}\frac{7}{200-2t}x - 250(200-2t)^{-\frac{7}{2}}\right]dt = (200-2t)^{-\frac{7}{2}} \cdot 0$$

$$(200-2t)^{-\frac{7}{2}}dx + \left[7(200-2t)^{-\frac{9}{2}}x - 250(200-2t)^{-\frac{7}{2}}\right]dt = 0$$

$$(200-2t)^{-\frac{7}{2}}dx + 7(200-2t)^{-\frac{9}{2}}xdt - 250(200-2t)^{-\frac{7}{2}}dt = 0$$

$$d\left[x(200-2t)^{-\frac{7}{2}}\right] + d\left[-50(200-2t)^{-\frac{5}{2}}\right] = d(K)$$

$$d\left[x(200-2t)^{-\frac{7}{2}} - 50(200-2t)^{-\frac{5}{2}}\right] = d(K)$$

$$\int d\left[x(200-2t)^{-\frac{7}{2}} - 50(200-2t)^{-\frac{5}{2}}\right] = \int d(K)$$

$x(200-2t)^{-\frac{7}{2}} - 50(200-2t)^{-\frac{5}{2}} = K$, solución general de la ED (*).

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{7}{200-2t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{7}{200-2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{7\int \frac{1}{200-2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{7}{2}\ln(200-2t)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(200-2t)^{-\frac{7}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = (200-2t)^{-\frac{7}{2}}$$

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$ y $x = 40$.

$$40(200 - 2 \cdot 0)^{-\frac{7}{2}} - 50(200 - 2 \cdot 0)^{-\frac{5}{2}} = K$$

$$40(200 - 0)^{-\frac{7}{2}} - 50(200 - 0)^{-\frac{5}{2}} = K$$

$$40(200)^{-\frac{7}{2}} - 50(200)^{-\frac{5}{2}} = K$$

$$(200)^{-\frac{7}{2}}[40 - 50(200)] = K$$

$$(200)^{-\frac{7}{2}}[40 - 10000] = K$$

$$K = [-9960](200)^{-\frac{7}{2}}$$

$$K = -9960(200)^{-\frac{7}{2}}$$

Despejando x, tenemos:

$$x(200 - 2t)^{-\frac{7}{2}} - 50(200 - 2t)^{-\frac{5}{2}} = -9960(200)^{-\frac{7}{2}}$$

$$x(200 - 2t)^{-\frac{7}{2}} = 50(200 - 2t)^{-\frac{5}{2}} - 9960(200)^{-\frac{7}{2}}$$

$$x = \frac{50(200 - 2t)^{-\frac{5}{2}} - 9960(200)^{-\frac{7}{2}}}{(200 - 2t)^{-\frac{7}{2}}}$$

$$x = (200 - 2t)^{\frac{7}{2}}\left[50(200 - 2t)^{-\frac{5}{2}} - 9960(200)^{-\frac{7}{2}}\right]$$

$$x = 50(200 - 2t)^{-\frac{5}{2}}(200 - 2t)^{\frac{7}{2}} - 9960(200)^{-\frac{7}{2}}(200 - 2t)^{\frac{7}{2}}$$

$$x = 50(200 - 2t) - 9960\,\frac{(200-2t)^{\frac{7}{2}}}{(200)^{\frac{7}{2}}}$$

$$x = 50 \cdot 2(100 - t) - 9960\left(\frac{200-2t}{200}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$x = 100(100 - t) - 9960\left[\frac{2(100-t)}{2(100)}\right]^{\frac{7}{2}}$$

$$x = 100(100 - t) - 9960\left(\frac{100-t}{100}\right)^{\frac{7}{2}}$$

Luego, la cantidad de sustancia química (g) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = 100(100 - t) - 9960\left(\frac{100-t}{100}\right)^{\frac{7}{2}}}$$

Respondiendo las preguntas.

a. La cantidad de sustancia química que hay en el tanque después de t minutos es:

$$\boldsymbol{x(t) = 100(100 - t) - 9960\left(\frac{100-t}{100}\right)^{\frac{7}{2}}}$$

b. La concentración de la sustancia química en el instante t.

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{100(100-t) - 9960\left(\frac{100-t}{100}\right)^{\frac{7}{2}}}{200 - 2t}$$

$$C(t) = \frac{2\left[50(100-t) - 4980\left(\frac{100-t}{100}\right)^{\frac{7}{2}}\right]}{2(100-t)}$$

$$\boldsymbol{C(t) = \frac{50(100-t) - 4980\left(\frac{100-t}{100}\right)^{\frac{7}{2}}}{100 - t}}$$

c. ¿Qué cantidad de la sustancia química habrá en el tanque cuando contenga el 50% de su contenido?

Calculamos el 50% de su contenido, es decir, volumen inicial del tanque; tenemos:

$$50\%V_0 = 50\%(200)$$

$$50\%V_0 = \frac{50}{100} \cdot 200$$

$$50\%V_0 = 50 \cdot 2$$

$50\%V_0 = 100\ lt$

Ahora calculamos el tiempo cuando haya $100\ lt$ en el tanque:

$V(t) = 200 - 2t$

$100 = 200 - 2t$

$2t = 200 - 100$

$2t = 100$

$t = \frac{100}{2}$

$t = 50$

Ahora si podemos calcular la cantidad de sustancia química que hay en el tanque cuanto

$t = 50\ min.$

$$x(t) = 100(100 - t) - 9960\left(\frac{100 - t}{100}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$x(50) = 100(100 - 50) - 9960\left(\frac{100 - 50}{100}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$x(50) = 100(50) - 9960\left(\frac{50}{100}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$x(50) = 5000 - 9960\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$\boldsymbol{x(50) \approx 4119,65}$

La cantidad de sustancia química que habrá en el tanque cuando contenga el 50% de su contenido es aproximadamente $4119,65\ g$.

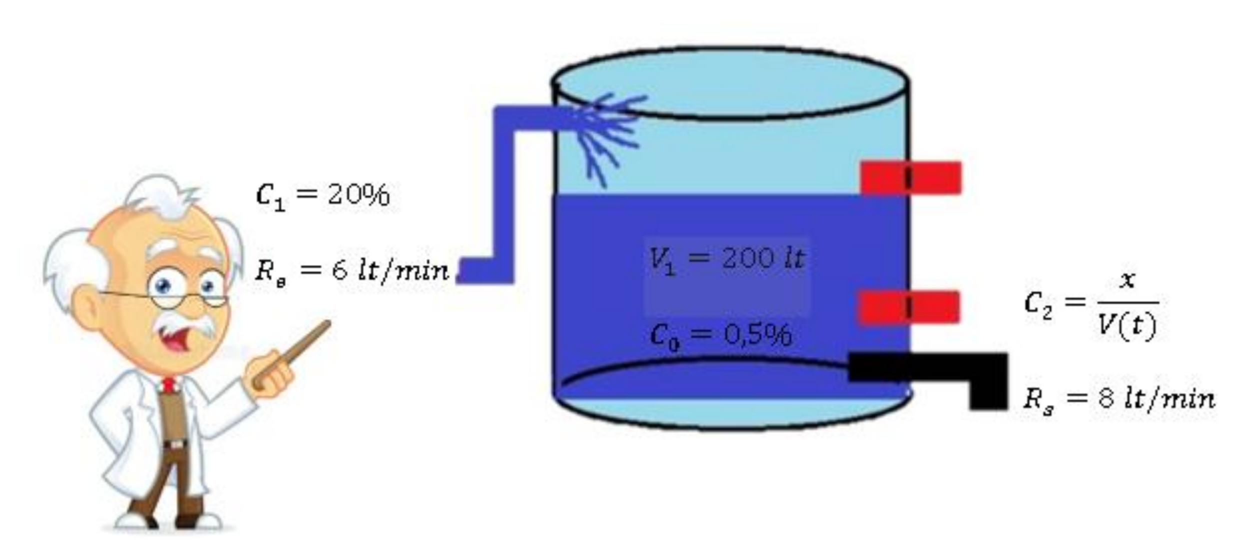
5. Una solución de ácido nítrico entra a una razón constante de 6 litros por minuto en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 200 litros de una solución de ácido nítrico al 0,5%. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque a razón de 8 litros por minuto. Si la solución que entra al tanque tiene ácido nítrico al 20%, determine el volumen de ácido nítrico en el tanque después de t minutos. ¿Cuándo llegará el porcentaje de ácido nítrico en el tanque al 10%?

Resolución:

Representando los datos en el tanque como se muestra en la figura 34.

Figura 34

Tanque con concentración de ácido nítrico.



Nota. Elaboración propia.

Inicialmente el tanque está con $200\ lt$ de una solución, por lo que en el instante $t = 0\ min$, el tanque contiene cierto porcentaje de ácido nítrico, es decir, $C_0 = 0{,}5\%$. Para determinar la cantidad de ácido nítrico en cero minutos, está dada de la siguiente ecuación:

$\boldsymbol{x_0 = V_0 \cdot C_0}$, sustituyendo los valores, tenemos:

$x_0 = V_0 \cdot C_0$

$x_0 = (200)(0{,}5\%)$

$x_0 = (200)\left(\frac{0{,}5}{100}\right)$

$x_0 = 2(0{,}5)$

$x_0 = 1$

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 1$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de ácido nítrico (lt) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 200 + (6 - 8)t$

$V(t) = 200 + (-2)t$

$V(t) = 200 - 2t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{(200 - 2t)} \frac{lt}{lt}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 200 - 2t$, esto se debe a que el flujo de entrada es menor que el flujo de salida; por lo que se pierde dos litros de solución en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es menor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad volumen de ácido nítrico en instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (6\ lt/min)(20\%\ lt/lt) - (8\ lt/min)\left(\frac{x}{200-2t}\ lt/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (6\ lt/min)\left(\frac{20}{100}\ lt/lt\right) - (8\ lt/min)\left(\frac{x}{200-2t}\ lt/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{5}\frac{lt}{min} - \frac{8x}{(200-2t)}\frac{lt}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{5} - \frac{8x}{(200-2t)};\ \ x(0) = 1$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{8}{200-2t}x = \frac{6}{5}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente t.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{8}{200-2t}x - \frac{6}{5} = 0$$

$$dx + \left(\frac{8}{200-2t}x - \frac{6}{5}\right)dt = 0\ \ (*)$$

Multiplicamos **P** en la ecuación (*).

$$(200-2t)^{-4}\left[dx + \left(\frac{8}{200-2t}x - \frac{6}{5}\right)dt = 0\right]$$

$$(200-2t)^{-4}dx + (200-2t)^{-4}\left(\frac{8}{200-2t}x - \frac{6}{5}\right)dt = (200-2t)^{-4}\cdot 0$$

$$(200-2t)^{-4}dx + \left[(200-2t)^{-4}\frac{8}{200-2t}x - \frac{6}{5}(200-2t)^{-4}\right]dt = 0$$

$$(200-2t)^{-4}dx + \left[8(200-2t)^{-5}x - \frac{6}{5}(200-2t)^{-4}\right]dt = 0$$

$$(200-2t)^{-4}dx + 8(200-2t)^{-5}xdt - \frac{6}{5}(200-2t)^{-4}dt = 0$$

$$d[x(200-2t)^{-4}] + d\left[-\frac{1}{5}(200-2t)^{-3}\right] = 0$$

$$d\left[x(200-2t)^{-4} - \frac{1}{5}(200-2t)^{-3}\right] = d(K)$$

$$\int d\left[x(200-2t)^{-4} - \frac{1}{5}(200-2t)^{-3}\right] = \int d(K)$$

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{8}{200-2t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{8}{200-2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{8\int \frac{1}{200-2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{8}{2}\ln(200-2t)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(200-2t)^{-\frac{8}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P} = (200-2t)^{-4}$$

$x(200-2t)^{-4}-\frac{1}{5}(200-2t)^{-3}=K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t=0$, $x=1$.

$$1(200-2\cdot 0)^{-4}-\frac{1}{5}(200-2\cdot 0)^{-3}=K$$

$$(200-0)^{-4}-\frac{1}{5}(200-0)^{-3}=K$$

$$(200)^{-4}-\frac{1}{5}(200)^{-3}=K$$

$$(200)^{-4}\left(1-\frac{1}{5}200\right)=K$$

$$(200)^{-4}(1-40)=K$$

$$(200)^{-4}(-39)=K$$

$$-39(200)^{-4}=K$$

$$K=-39(200)^{-4}$$

Despejando x, tenemos:

$$x(200-2t)^{-4}-\frac{1}{5}(200-2t)^{-3}=-39(200)^{-4}$$

$$x(200-2t)^{-4}=\frac{1}{5}(200-2t)^{-3}-39(200)^{-4}$$

$$x=\frac{\frac{1}{5}(200-2t)^{-3}-39(200)^{-4}}{(200-2t)^{-4}}$$

$$x=\frac{\frac{1}{5}(200-2t)^{-3}}{(200-2t)^{-4}}-\frac{39(200)^{-4}}{(200-2t)^{-4}}$$

$$x=\frac{1}{5}(200-2t)^{-3}(200-2t)^{4}-39(200)^{-4}(200-2t)^{4}$$

$$x=\frac{1}{5}(200-2t)-39\frac{(200-2t)^{4}}{(200)^{4}}$$

$$x=\frac{2}{5}(100-t)-39\left(\frac{200-2t}{200}\right)^{4}$$

$$x=\frac{2}{5}(100-t)-39\left[\frac{2(100-t)}{2(100)}\right]^{4}$$

$x = \frac{2}{5}(100 - t) - 39\left[\frac{100-t}{100}\right]^4$

Luego, la cantidad de volumen de ácido nítrico (lt) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x = \frac{2}{5}(100 - t) - 39\left[\frac{100-t}{100}\right]^4}$$

Respondiendo las preguntas.

¿Cuándo llegará el porcentaje de ácido nítrico en el tanque al 10%?

El 10% representa la concentración de ácido nítrico en el tanque, por lo que se utiliza la fórmula de concentración.

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$10\% = \frac{\frac{2}{5}(100-t) - 39\left[\frac{100-t}{100}\right]^4}{200-2t}$$

$$\frac{10}{100} = \frac{\frac{2}{5}(100-t)}{2(100-t)} - 39\frac{\frac{(100-t)^4}{(100)^4}}{2(100-t)}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{5} - \frac{39(100-t)^3}{2(100)^4}$$

$$\frac{39(100-t)^3}{2(100)^4} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{39(100-t)^3}{2(100)^4} = \frac{1}{10}$$

$$(100 - t)^3 = \frac{2(100)^4}{39 \cdot 10}$$

$$\sqrt[3]{(100 - t)^3} = \sqrt[3]{\frac{2(100)^4}{39 \cdot 10}}$$

$$100 - t \approx 80{,}04$$

$$100 - 80{,}04 \approx t \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{t \approx 19{,}96}$$

El porcentaje de ácido nítrico en el tanque al 10% llegará aproximadamente a 19,96 minutos.

6. Se bombea cerveza con un contenido de 6% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 400 galones de cerveza con 3% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior con una rapidez de 3 galones por minuto, en tanto que el líquido mezclado se extrae con una rapidez de 4 galones por minuto, determine:

a. El número de galones de alcohol que hay en el tanque en un instante $t > 0$.

b. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol que hay en el tanque después de 60 minutos?

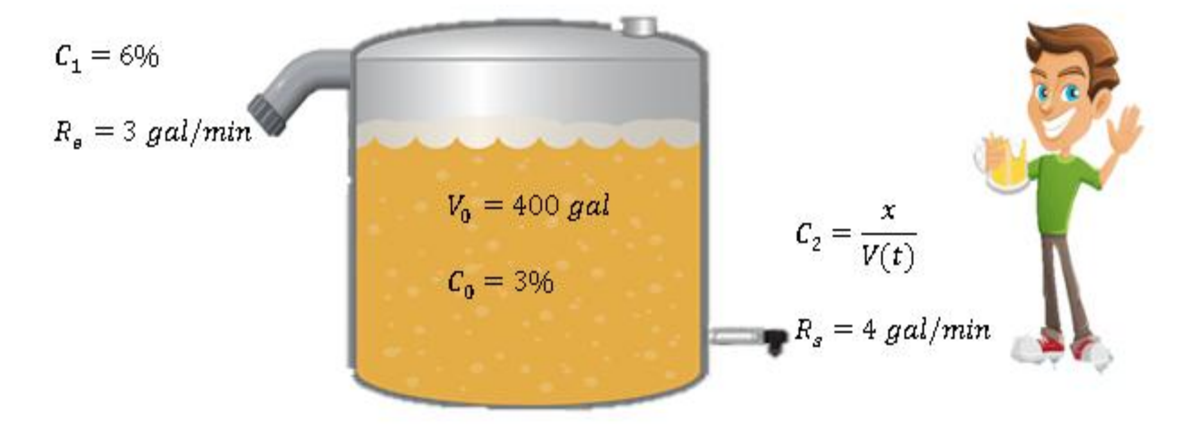
c. ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse?

Resolución:

Representamos los datos en el tanque como se muestra en la figura 35.

Figura 35

Tanque con concentración de alcohol.



Nota. Elaboración propia.

Inicialmente el tanque está con $400\ gal$ de cerveza, por lo que en el instante $t = 0$, el tanque contiene cierto porcentaje de alcohol, es decir, $C_0 = 3\%$. Para determinar la cantidad de alcohol en cero minutos, está dada de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x_0 = V_0 \cdot C_0}$, sustituyendo los valores, tenemos:

$x_0 = V_0 \cdot C_0$

$x_0 = (400)(3\%)$

$x_0 = (400)\left(\frac{3}{100}\right)$

$x_0 = 4(3)$

$x_0 = 12$

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 12$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de alcohol (gal) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 400 + (3 - 4)t$

$V(t) = 400 + (-)t$

$V(t) = 400 - t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{(400 - t)} \frac{gal}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 400 - t$, esto se debe a que el flujo de entrada es menor que el flujo de salida; por lo que se pierde un galón de líquido en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es menor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad volumen de alcohol en instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (3\ gal/min)(6\%\ gal/gal) - (4\ gal/min)\left(\frac{x}{400-t}\ gal/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (3\ gal/min)\left(\frac{6}{100}\ gal/gal\right) - (4\ gal/min)\left(\frac{x}{400-t}\ gal/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9}{50}\frac{gal}{min} - \frac{4x}{(400-t)}\frac{gal}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9}{50} - \frac{4x}{(400-t)};\ \ x(0) = 12$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{400-t}x = \frac{9}{50}$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente t.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{400-t}x - \frac{9}{50} = 0$$

$$dx + \left(\frac{4}{400-t}x - \frac{9}{50}\right)dt = 0\ \ (*)$$

Multiplicamos **P** en la ecuación (*).

$$(400-t)^{-4}\left[dx + \left(\frac{4}{400-t}x - \frac{9}{50}\right)dt = 0\right]$$

$$(400-t)^{-4}dx + (400-t)^{-4}\left(\frac{4}{400-t}x - \frac{9}{50}\right)dt = (400-t)^{-4}\cdot 0$$

$$(400-t)^{-4}dx + \left[(400-t)^{-4}\frac{4}{400-t}x - \frac{9}{50}(400-t)^{-4}\right]dt = 0$$

$$(400-t)^{-4}dx + \left[4(400-t)^{-5}x - \frac{9}{50}(400-t)^{-4}\right]dt = 0$$

$$(400-t)^{-4}dx + 4(400-t)^{-5}xdt - \frac{9}{50}(400-t)^{-4}dt = 0$$

$$d[x(400-t)^{-4}] + d\left[-\frac{3}{50}(400-t)^{-3}\right] = d(K)$$

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{4}{400-t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{4}{400-t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{4\int \frac{1}{400-t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-4\ln(400-t)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(400-t)^{-4}}$$

$$\boldsymbol{P} = (400-t)^{-4}$$

$$d\left[x(400-t)^{-4}-\frac{3}{50}(400-t)^{-3}\right]=d(K)$$

$$\int d\left[x(400-t)^{-4}-\frac{3}{50}(400-t)^{-3}\right]=\int d(K)$$

$x(400-t)^{-4}-\frac{3}{50}(400-t)^{-3}=K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t=0$, $x=12$.

$$12(400-0)^{-4}-\frac{3}{50}(400-0)^{-3}=K$$

$$12(400)^{-4}-\frac{3}{50}(400)^{-3}=K$$

$$(400)^{-4}\left(12-\frac{3}{50}400\right)=K$$

$$(400)^{-4}(12-3\cdot 8)=K$$

$$(400)^{-4}(12-24)=K$$

$$(400)^{-4}(-12)=K$$

$$-12(400)^{-4}=K$$

$$k=-12(400)^{-4}$$

Despejando x, tenemos:

$$x(400-t)^{-4}-\frac{3}{50}(400-t)^{-3}=-12(400)^{-4}$$

$$x(400-t)^{-4}=\frac{3}{50}(400-t)^{-3}-12(400)^{-4}$$

$$x=\frac{\frac{3}{50}(400-t)^{-3}-12(400)^{-4}}{(400-t)^{-4}}$$

$$x=\frac{\frac{3}{50}(400-t)^{-3}}{(400-t)^{-4}}-\frac{12(400-t)^{-4}}{(400-t)^{-4}}$$

$$x=\frac{3}{50}(400-t)^{-3}(400-t)^{4}-12(400)^{-4}(400-t)^{4}$$

$$x=\frac{3}{50}(400-t)-12\,\frac{(400-t)^{4}}{(400)^{4}}$$

$x = \frac{3}{50}(400 - t) - 12\left(\frac{400-t}{400}\right)^4$

$x(t) = \frac{3}{50}(400 - t) - 12\left(\frac{400-t}{400}\right)^4$

Luego, la cantidad de alcohol (gal) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$\boldsymbol{x(t) = \frac{3}{50}(400 - t) - 12\left(\frac{400-t}{400}\right)^4}$

Respondiendo las preguntas:

a. El número de galones de alcohol que hay en el tanque en un instante $t > 0$ es:

$\boldsymbol{x(t) = \frac{3}{50}(400 - t) - 12\left(\frac{400-t}{400}\right)^4}$

b. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol que hay en el tanque después de 60 minutos?

Lo que se pide es la concentración de alcohol en 60 minutos.

$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$

$C(t) = \frac{\frac{3}{50}(400-t)-12\left(\frac{400-t}{400}\right)^4}{400-t}$

$C(60) = \frac{\frac{3}{50}(400-60)-12\left(\frac{400-60}{400}\right)^4}{400-60}$

$C(60) = \frac{\frac{3}{50}(340)-12\left(\frac{340}{400}\right)^4}{340}$

$C(60) = \frac{\frac{102}{5}-12\left(\frac{17}{20}\right)^4}{340}$

$C(60) \approx 0{,}0416$

$\boldsymbol{C(60) \approx 4{,}16\%}$

El porcentaje de alcohol que hay en el tanque después de 60 minutos es aproximadamente 4,16%.

c. ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse?

El tanque está vacío cuando $V(t) = 0$, entonces podemos calcular cuando demora en vaciarse. A partir de la ecuación de volumen:

$V(t) = 400 - t$

$0 = 400 - t$

$\boldsymbol{t = 400}$

El tanque demorará en vaciarse a los 400 minutos.

7. El aire de una pequeña habitación de 12 por 8 por 8 pies tiene 3% de monóxido de carbono. A partir de $t = 0$, se introduce aire fresco sin monóxido de carbono en la habitación, a razón de 100 pies cúbicos por minuto. Si el aire de la habitación sale por una ventila con la misma razón, ¿en qué momento tendrá el aire de la habitación 0,01% de monóxido de carbono?

Resolución:

Representamos los datos en la habitación como se muestra en la figura 36.

Figura 36

Habitación con concentración de monóxido de carbono.



Nota. Elaboración propia.

Las dimensiones de la habitación son de 12 por 8 por 8 pies, con estos datos podemos calcular el volumen de la habitación:

$V_0 = (largo)(ancho)(alto)$

$V_0 = (12\, pies)(8\, pies)(8\, pies)$

$V_0 = 768\, pies^3$

Se observa que no hay concentración de entrada en la habitación, esto se debe a que en $t = 0$ solamente se deja entrar aire fresco en la habitación, sin monóxido de carbono. Entonces $C_1 = 0\%$.

Para determinar la condición inicial del problema, sabemos que la habitación ya tenía 3% de monóxido de carbono, esto ocurre en $t = 0$. Procedemos a calcular la cantidad de monóxido de carbono cuando hay un volumen inicial de aire:

$x_0 = V_0 \cdot C_0$

$x_0 = 768 \cdot 3\%$

$$x_0 = 768 \cdot \frac{3}{100}$$

$$x_0 = \frac{576}{25}$$

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = \frac{576}{25}$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de monóxido de carbono (pies^3) que hay en la habitación en un tiempo t y $V(t)$ volumen de aire en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 768 + (100 - 100)t$

$V(t) = 768 + (0)t$

$V(t) = 768 - 0$

$V(t) = 768$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{(768)} \frac{pies^3}{pies^3}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 768$, esto se debe a que el flujo de entrada es igual que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana pies cúbicos de aire en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es igual que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad volumen de monóxido de carbono en instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (100\, pies^3/min)(0\%\, pies^3/pies^3) - (100\, pies^3/min)\left(\frac{x}{768}\ pies^3/pies^3\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (100\, pies^3/min)\left(\frac{0}{100}\ pies^3/pies^3\right) - (100\, pies^3/min)\left(\frac{x}{768}\ pies^3/pies^3\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0\ - \frac{100x}{768}\ pies^3/min$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{100x}{768}\ pies^3/min$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{100x}{768}\ ; \quad x(0) = \frac{576}{25}$$

$dx = -\frac{100x}{768}dt$, ED de variable separable. (*)

$\frac{dx}{x} = -\frac{100}{768}dt$

$\int \frac{dx}{x} = \int \left(-\frac{100}{768}dt\right) + K$

$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{100}{768}dt + K$

$\ln x = -\frac{100}{768}t + K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$ y $x = \frac{576}{25}$.

$\ln \frac{576}{25} = -\frac{100}{768} \cdot 0 + K$

$\ln \frac{576}{25} = 0 + K$

$\ln \frac{576}{25} = K$

$K = \ln \frac{576}{25}$

Despejamos x, tenemos:

$\ln x = -\frac{100}{768}t + \ln \frac{576}{25}$

$e^{\ln x} = e^{-\frac{100}{768}t + \ln\frac{576}{25}}$

$x = e^{-\frac{100}{768}t}e^{\ln\frac{576}{25}}$

$x = e^{-\frac{100}{768}t} \cdot \frac{576}{25}$

$x = \frac{576}{25}e^{-\frac{100}{768}t}$

Luego, la cantidad de monóxido de carbono (pies^3) que hay en la habitación en un instante t (minutos) es:

$\boldsymbol{x(t) = \frac{576}{25}e^{-\frac{100}{768}t}}$

Respondiendo la pregunta.

¿En qué momento tendrá el aire de la habitación 0,01% de monóxido de carbono?

Se nos pide el tiempo que tendrá el aire de la habitación cuando haya una concentración de 0,01% de monóxido de carbono.

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$0{,}01\% = \frac{\frac{576}{25}e^{-\frac{100}{768}t}}{768}$$

$$\frac{0{,}01}{100} = \frac{\frac{576}{25}e^{-\frac{100}{768}t}}{768}$$

$$\frac{0{,}01}{100} \cdot 768 = \frac{576}{25}e^{-\frac{100}{768}t}$$

$$\frac{0{,}01}{100} \cdot 768 \cdot \frac{25}{576} = e^{-\frac{100}{768}t}$$

$$\frac{1}{300} = e^{-\frac{100}{768}t}$$

$$e^{-\frac{100}{768}t} = \frac{1}{300}$$

$$\ln e^{-\frac{100}{768}t} = \ln \frac{1}{300}$$

$$-\frac{100}{768}t \ln e = \ln \frac{1}{300}$$

$$-\frac{100}{768}t \cdot 1 = \ln \frac{1}{300}$$

$$t = -\frac{768}{100}\ln \frac{1}{300}$$

$$\boldsymbol{t \approx 43{,}80}$$

La habitación tendrá aire con 0,01% de monóxido de carbono en aproximadamente 43,80 minutos.

8. Un tanque de 600 galones contiene la mitad de su capacidad de salmuera, con una concentración de sal de 2 kilogramos por galón. Se inyecta salmuera al tanque con concentración de 3 kilogramos por galón a razón 6 galones por minuto. La salmuera, debidamente agitada y homogeneizada en el tanque, fluye a razón de R_S galón por minuto. Si se sabe que al cabo de dos horas y media el tanque alcanza su máxima capacidad, determine:

a. El flujo de salida R_S.

b. La cantidad de sal en un instante t.

c. ¿Cuánto tiempo transcurre para que el tanque llegue a los 500 galones?

d. ¿Qué cantidad de sal habrá cuando alcanza su máxima capacidad?

Resolución:

Representación de los datos en el tanque:

Figura 37

Tanque con salmuera.

Nota. Elaboración propia.

El tanque tiene una capacidad de 600 galones, inicialmente el tanque tiene la mitad de su capacidad; por lo que matemáticamente se traduce de la siguiente igualdad:

$$V_0 = V_T \cdot \frac{1}{2}$$

$$V_0 = 600 \cdot \frac{1}{2}$$

$$V_0 = 300\ gal$$

El volumen de un líquido en un instante t, viene dado de la siguiente fórmula:

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$, a partir de está podemos calcular el flujo de salida. Ya que el problema nos dice que en dos horas y media el tanque alcanza su máxima capacidad.

Primero convertimos las dos horas y media en minutos.

$$2\tfrac{1}{2}\ h \ \ \rightarrow min$$

$$2\tfrac{1}{2}\ h = 2\tfrac{1}{2}\ h(1)$$

$$2\tfrac{1}{2}\ h = \frac{5}{2}\ h\left(\frac{60\ min}{1\ h}\right)$$

$$2\tfrac{1}{2}\ h = \frac{5}{2} \cdot 60\ \ min$$

$$2\tfrac{1}{2}\ h = 150\ \ min$$

Observación:

$$1\ h = 60\ min$$

$$\frac{1\ h}{1\ h} = \frac{60\ min}{1\ h}$$

$$1 = \frac{60\ min}{1\ h}$$

Entonces en 150 minutos el tanque estará a 600 galones, es decir, $V(150) = 600$.

Ahora si podemos calcular el flujo de salida:

$$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$$

$$600 = 300 + (6 - R_s)150$$

$$600 - 300 = (6 - R_s)150$$

$$300 = (6 - R_s)150$$

$$\frac{300}{150} = 6 - R_s$$

$2 = 6 - R_s$

$R_s = 6 - 2$

$R_s = 4\ gal/min$

Ahora calculamos en $t = 0$, la cantidad de sal que hay en el tanque con un volumen inicial de 300 galones y una concentración de 2 kilogramos por galón.

$x_0 = V_0 \cdot C_0$

$x_0 = 300 \cdot 2$

$x_0 = 600\ kg$

Por lo tanto, la condición inicial del problema es: $x(0) = 600$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal (kg) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen del tanque en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 300 + (6 - 4)t$

$V(t) = 300 + (2)t$

$V(t) = 300 + 2t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{(300 + 2t)} \frac{kg}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 300 + 2t$, esto se debe a que el flujo de entrada es mayor que el flujo de salida; por lo que se gana dos galones en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es mayor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal que hay en un instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (6\ gal/min)(3\ kg/gal) - (4\ gal/min)\left(\frac{x}{300+2t}\ kg/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 18\ \frac{kg}{min} - \frac{4x}{300+2t}\ \frac{kg}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$\frac{dx}{dt} = 18 - \frac{4x}{300+2t}$; $x(0) = 600$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{300+2t}x = 18$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{2(150+t)}x = 18$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{2(150+t)}x = 18$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{150+t}x = 18$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{150+t}x - 18 = 0$$

$dx + \left(\frac{2}{150+t}x - 18\right)dt = 0$ (*)

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(150+t)^2\left[dx + \left(\frac{2}{150+t}x - 18\right)dt = 0\right]$$

$$(150+t)^2 dx + (150+t)^2\left(\frac{2}{150+t}x - 18\right)dt = (150+t)^2 \cdot 0$$

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{2}{150+t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{2}{150+t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{2\int \frac{1}{150+t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{2\ln(150+t)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(150+t)^2}$$

$$\boldsymbol{P} = (150+t)^2$$

$$(150+t)^2dx+\left[\frac{2}{150+t}(150+t)^2x-18(150+t)^2\right]dt=0$$

$$(150+t)^2dx+[2(150+t)x-18(150+t)^2]dt=0$$

$$(150+t)^2dx+2(150+t)xdt-18(150+t)^2dt=0$$

$$d[x(150+t)^2]-d[6(150+t)^3]=d(K)$$

$$d[x(150+t)^2-6(150+t)^3]=d(K)$$

$$\int d[x(150+t)^2-6(150+t)^3]=\int d(K)$$

$x(150+t)^2-6(150+t)^3=K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t=0$, $x=600$.

$$600(150+0)^2-6(150+0)^3=K$$

$$600(150)^2-6(150)^3=K$$

$$(150)^2(600-6\cdot 150)=K$$

$$(150)^2(600-900)=K$$

$$(150)^2(-300)=K$$

$$-300(150)^2=K$$

$$K=-300(150)^2$$

Despejando x, tenemos:

$$x(150+t)^2-6(150+t)^3=-300(150)^2$$

$$x(150+t)^2=6(150+t)^3-300(150)^2$$

$$x=\frac{6(150+t)^3-300(150)^2}{(150+t)^2}$$

$$x=\frac{6(150+t)^3}{(150+t)^2}-\frac{300(150)^2}{(150+t)^2}$$

$$x=6(150+t)-300\left(\frac{150}{150+t}\right)^2$$

Luego, la cantidad de sal (kg) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = 6(150 + t) - 300\left(\frac{150}{150 + t}\right)^2}$$

Respondiendo las preguntas.

a. El flujo de salida R_s.

El flujo de salida es: $\boldsymbol{R_s = 4\ gal/min}$

b. La cantidad de sal en un instante t.

La cantidad de sal (kg) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = 6(150 + t) - 300\left(\frac{150}{150 + t}\right)^2}$$

c. ¿Cuánto tiempo transcurre para que el tanque llegue a los 500 galones?

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$500 = 300 + (6 - 4)t$

$500 - 300 = 2t$

$200 = 2t$

$\frac{200}{2} = t$

$100 = t$

$\boldsymbol{t = 100}$

El tanque llegue a los 500 galones con un tiempo de 100 minutos.

d. ¿Qué cantidad de sal habrá cuando alcanza su máxima capacidad?

El tanque alcanza su capacidad máxima cuando llega a dos horas y media.

$2\frac{1}{2}\ h = 150\ min$

$x(t) = 6(150 + t) - 300\left(\frac{150}{150+t}\right)^2$

$x(150) = 6(150 + 150) - 300\left(\frac{150}{150+150}\right)^2$

$x(150) = 6(300) - 300\left(\frac{150}{300}\right)^2$

$x(150) = 1800 - 300\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x(150) = 1800 - 300 \cdot \frac{1}{4}$

$x(150) = 1800 - 75$

$\boldsymbol{x(150) = 1725}$

Cuando el tanque alcanza su máxima capacidad habrá 1725 kilogramos de sal.

9. Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. A razón de 2 galones por minuto entra al tanque salmuera que contiene 1 libra de sal por galón y la solución uniformemente mezclada sale del tanque a razón de 3 galones por minuto.

a. Obtener la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.

b. Calcular la concentración de sal en el tanque después de media hora.

c. Determine la concentración de sal en el tanque cuando hay solamente 10 galones de solución.

d. ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

Resolución:

Datos del problema:

$V_0 = 60\ gal$ $\qquad R_s = 3\ gal/min$

$R_e = 2\ gal/min$ $\qquad C_2 = \frac{x}{V(t)}$

$C_1 = 1\ lb\ de\ sal/gal$

Inicialmente el tanque está con 60 gal de agua pura, por lo que en el instante $t = 0$, el depósito no contiene sal, es decir, $x_0 = 0$. A partir de este análisis determinamos la condición inicial de problema: $x(0) = 0$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 60 + (2 - 3)t$

$V(t) = 60 + (-1)t$

$V(t) = 60 - t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{(60 - t)} \frac{lb}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 60 - t$, esto se debe a que el flujo de entrada es menor que el flujo de salida, por lo que se pierde un galón de agua en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es menor que V_0.

Ahora sí podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal en el tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (2\ gal/min)(1\ lb/gal) - (3\ gal/min)\left(\frac{x}{60-t}\ lb/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\frac{lb}{min} - \frac{3x}{(60-t)}\frac{lb}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición del problema.

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{3x}{60-t}; \quad x(0) = 0$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60-t}x = 2$, la ED es lineal con variable dependiente x, variable independiente t.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60-t}x - 2 = 0$$

$$dx + \left(\frac{3}{60-t}x - 2\right)dt = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ecuación (*).

$$(60-t)^{-3}\left[dx + \left(\frac{3}{60-t}x - 2\right)dt = 0\right]$$

$$(60-t)^{-3}dx + (60-t)^{-3}\left(\frac{3}{60-t}x - 2\right)dt = (60-t)^{-3}\cdot 0$$

$$(60-t)^{-3}dx + \left[(60-t)^{-3}\frac{3}{60-t}x - 2(60-t)^{-3}\right]dt = 0$$

$$(60-t)^{-3}dx + [3x(60-t)^{-4} - 2(60-t)^{-3}]dt = 0$$

$$(60-t)^{-3}dx + 3x(60-t)^{-4}dt - 2(60-t)^{-3}dt = 0$$

$$[(60-t)^{-3}dx + 3x(60-t)^{-4}dt] - 2(60-t)^{-3}dt = 0$$

$$d[x(60-t)^{-3}] + d[-(60-t)^{-2}] = d(C)$$

$$d[x(60-t)^{-3} - (60-t)^{-2}] = d(C)$$

$$\int d[x(60-t)^{-3} - (60-t)^{-2}] = \int d(C)$$

$x(60-t)^{-3} - (60-t)^{-2} = C$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$ y $x = 0$.

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{3}{60-t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{3}{60-t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-3\int \frac{-1}{60-t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-3\ln(60-t)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(60-t)^{-3}}$$

$$\boldsymbol{P} = (60-t)^{-3}$$

$0(60-0)^{-3} - (60-0)^{-2} = C$

$0 - (60)^{-2} = C$

$-(60)^{-2} = C$

$C = -(60)^{-2}$

Despejando x, tenemos:

$x(60-t)^{-3} - (60-t)^{-2} = -(60)^{-2}$

$x(60-t)^{-3} = (60-t)^{-2} - (60)^{-2}$

$$x = \frac{(60-t)^{-2} - (60)^{-2}}{(60-t)^{-3}}$$

$$x = \frac{(60-t)^{-2}}{(60-t)^{-3}} - \frac{(60)^{-2}}{(60-t)^{-3}}$$

$$x = (60-t)^{3}(60-t)^{-2} - \frac{(60-t)^{3}}{(60)^{2}}$$

$$x = 60 - t - 60\frac{(60-t)^{3}}{(60)^{3}}$$

$$x = 60 - t - 60\left(\frac{60-t}{60}\right)^{3}$$

Luego, la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = 60 - t - 60\left(\frac{60-t}{60}\right)^{3}}$$

Respondiendo las preguntas.

La cantidad de sal en el tanque después de t minutos es:

$$\boldsymbol{x(t) = 60 - t - 60\left(\frac{60-t}{60}\right)^{3}}$$

La concentración de sal en el tanque después de media hora.

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{60 - t - 60\left(\frac{60 - t}{60}\right)^3}{60 - t}$$

$$C(30) = \frac{60 - 30 - 60\left(\frac{60 - 30}{60}\right)^3}{60 - 30}$$

$$\frac{1}{2} hora = 30\ minutos$$

$$C(30) = \frac{30 - 60\left(\frac{30}{60}\right)^3}{30}$$

$$C(30) = \frac{30 - 60\left(\frac{1}{2}\right)^3}{30}$$

$$C(30) = \frac{30\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{8}\right)}{30}$$

$$C(30) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$C(30) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$C(30) = \frac{3}{4}$$

$$\boldsymbol{C(30) = 0,75\ lb/gal}$$

Determine la concentración de sal en el tanque cuando hay solamente 10 galones de solución.

$V = 10\ gal$

$V(t) = 60 - t$

$10 = 60 - t$

$t = 60 - 10$

$t = 50\ min$

Cuando hay solamente 10 galones pasa 50 minutos, entonces, calculamos la concentración de sal en 50 minutos.

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{60 - t - 60\left(\frac{60 - t}{60}\right)^3}{60 - t}$$

$$C(50) = \frac{60 - 50 - 60\left(\frac{60 - 50}{60}\right)^3}{60 - 50}$$

$$C(50) = \frac{10 - 60\left(\frac{10}{60}\right)^3}{10}$$

$$C(50) = \frac{10 - 60\left(\frac{1}{6}\right)^3}{10}$$

$$C(50) = \frac{10\left(1 - 6 \cdot \frac{1}{6^3}\right)}{10}$$

$$C(50) = 1 - \frac{1}{6^2}$$

$$C(50) = 1 - \frac{1}{36}$$

$$C(50) = \frac{35}{36}$$

$$\boldsymbol{C(50) \approx 0,972\ lb/gal}$$

¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

Solución:

Para determinar la cantidad máxima de sal en el tanque, debemos derivar la función $x(t)$ para determinar el tiempo máximo y luego reemplazarlo en la función.

$$x(t) = 60 - t - 60\left(\frac{60-t}{60}\right)^3$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left[60 - t - 60\left(\frac{60-t}{60}\right)^3\right]$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(60) - \frac{d}{dt}(t) - 60\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{60-t}{60}\right)^3\right]$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 - 1 - 60\left[3\left(\frac{60-t}{60}\right)^2\frac{d}{dt}\left(\frac{60-t}{60}\right)\right]$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -1 - 60 \cdot 3\left(\frac{60-t}{60}\right)^2\frac{d}{dt}\left(\frac{60}{60} - \frac{t}{60}\right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -1 - 60 \cdot 3\left(\frac{60-t}{60}\right)^2\left(-\frac{1}{60}\right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -1 + 3\left(\frac{60-t}{60}\right)^2$$

Igualando a cero $\frac{dx(t)}{dt}$, se obtiene:

$$0 = -1 + 3\left(\frac{60-t}{60}\right)^2$$

$$1 = 3\left(\frac{60-t}{60}\right)^2$$

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{60-t}{60}\right)^2$$

$$\left(\frac{60-t}{60}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\left(\frac{60-t}{60}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{60-t}{60} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$60 - t = \pm\frac{60}{\sqrt{3}}$

$60 - t = \pm\frac{60}{3}\sqrt{3}$

$60 - t = \pm 20\sqrt{3}$

$60 \pm 20\sqrt{3} = t$

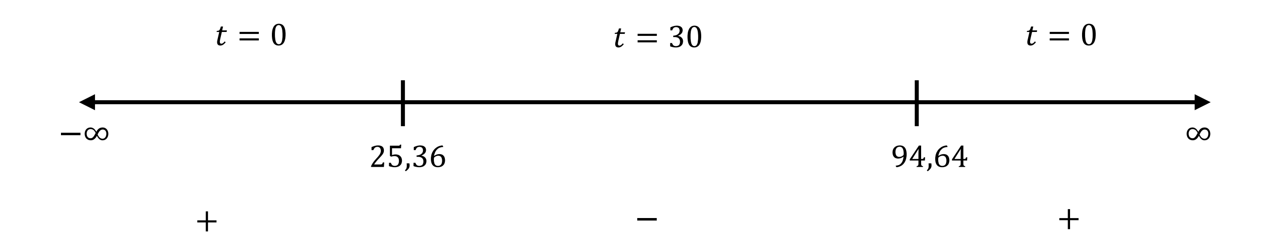
$t = 60 \pm 20\sqrt{3}$

Tenemos dos soluciones para t.

$t_1 = 60 + 20\sqrt{3}$ $\quad\wedge\quad$ $t_2 = 60 - 20\sqrt{3}$

$t_1 \approx 94{,}64$ $\quad\wedge\quad$ $t_2 \approx 25{,}36$

Ubicamos los puntos en la recta numérica, luego tomar valores de prueba para reemplazarlo en la derivada y determinar el comportamiento de signos en cada intervalo.



En el punto $25{,}36$ acurre que los signos van de positivo a negativo.

En el punto $94{,}64$ acurre que los signos van de negativo a positivo.

Por lo tanto, hay un máximo en $25{,}35$ y un mínimo en $94{,}64$. Nos preguntan la cantidad máxima de sal en tanque.

Entonces consideremos el punto $25{,}36$ para determinar la cantidad máxima de sal en el tanque, ese punto lo evaluamos en la función $x(t)$, así:

$$x(t) = 60 - t - 60\left(\frac{60 - t}{60}\right)^3 \ ; \qquad t \approx 25{,}36$$

$$x(25{,}36) = 60 - 25{,}35 - 60\left(\frac{60 - 25{,}36}{60}\right)^3$$

$$x(25{,}36) = 34{,}64 - 60\left(\frac{34{,}64}{60}\right)^3$$

$$\boldsymbol{x(25,36) \approx 23,09}$$

La cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque es aproximadamente $23{,}09$ libras en un tiempo aproximado de $25{,}36$ minutos.

10. Un tanque contiene 50 galones de agua pura. Una solución de agua salada con 1 libra de sal por galón entra al tanque a razón de 2 galones por minuto y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.

a. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de t minuto?

b. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la mezcla del tanque tenga una concentración de 0,5 libra de sal por galón?

c. ¿Cuál es la concentración de sal después de un tiempo largo?

d. Determine la concentración de sal en el tanque, cuando haya pasado una hora y media.

Resolución:

Datos:

$V = 50\ gal$ $\qquad$ $R_s = 2gal/min$

$C_1 = 1\ lb/\ gal$ $\qquad$ $C_2 = \dfrac{x}{V(t)}$

$R_e = 2\ gal/min$

El tanque está con $50\ gal$ de agua pura, por lo que en el instante $t = 0$, el tanque no contiene sal, es decir, $x_0 = 0$. A partir de este análisis determinamos la condición inicial de problema:

$x(0) = 0$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{v(t)}$, donde x es la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_a)t$

$V(t) = 50 + (2 - 2)t$

$V(t) = 50 + (0)t$

$V(t) = 50 + 0$

$V(t) = 50$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$C_2 = \frac{x}{50}\frac{lb}{gal}$

Observación: Se observa que el volumen $V(t)$ es el mismo que el volumen inicial, esto se debe a que el flujo de entrada es el mismo que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana galones de agua en el tanque. Entonces el volumen permanece constante.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal en el tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$

$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$

$\frac{dx}{dt} = (2\ gal/min)(1\ lb/gal) - (2\ gal/min)\left(\frac{x}{50}\ lb/gal\right)$

$\frac{dx}{dt} = 2\ \frac{lb}{min} - \frac{2x}{50}\ \frac{lb}{min}$

$\frac{dx}{dt} = 2\ \frac{lb}{min} - \frac{x}{25}\ \frac{lb}{min}$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$\frac{dx}{dt} = 2\ - \frac{x}{25}\ ; \quad x(0) = 0$

$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{25}x = 2$, la ED es lineal en x.

$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{25}x - 2 = 0$

$dx + \left(\frac{1}{25}x - 2\right)dt = 0 \quad (*)$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$e^{\frac{1}{25}t}\left[dx + \left(\frac{1}{25}x - 2\right)dt\right] = 0 \cdot e^{\frac{1}{25}t}$

$e^{\frac{1}{25}t}dx + e^{\frac{1}{25}t}\left(\frac{1}{25}x - 2\right)dt = 0$

$e^{\frac{1}{25}t}dx + \frac{x}{25}e^{\frac{1}{25}t}dt - 2e^{\frac{1}{25}t}dt = 0$

$d\left(xe^{\frac{1}{25}t}\right) - d\left(50e^{\frac{1}{25}t}\right) = d(K)$

$\int d\left(xe^{\frac{1}{25}t}\right) - \int d\left(50e^{\frac{1}{25}t}\right) = \int d(K)$

$xe^{\frac{1}{25}t} - 50e^{\frac{1}{25}t} = K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$, $x = 0$.

$0 \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot 0} - 50e^{\frac{1}{25}\cdot 0} = K$

$0 - 50e^{0} = K$

Factor integrante.

$x(t) = \frac{1}{25}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{25}dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{25}\int dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{25}t}$

$-50 \cdot 1 = K$

$-50 = K \quad \rightarrow \quad K = -50$

Despejando x, tenemos:

$xe^{\frac{1}{25}t} - 50e^{\frac{1}{25}t} = -50$

$xe^{\frac{1}{25}t} = 50e^{\frac{1}{25}t} - 50$

$x = \frac{50e^{\frac{1}{25}t} - 50}{e^{\frac{1}{25}t}}$

$x = \frac{50e^{\frac{1}{25}t}}{e^{\frac{1}{25}t}} - \frac{50}{e^{\frac{1}{25}t}}$

$x = 50 - 50e^{-\frac{1}{25}t}$

Luego, la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$\boldsymbol{x(t) = 50 - 50e^{-\frac{1}{25}t}}$

Respondiendo las preguntas.

a. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de t minuto?

La cantidad de sal en el tanque después de t minutos es:

$\boldsymbol{x(t) = 50 - 50e^{-\frac{1}{25}t}}$

b. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la mezcla del tanque tenga una concentración de 0,5 libra de sal por galón?

La concentración de la mezcla en cualquier instante es:

$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$

$$C(t) = \frac{50 - 50e^{-\frac{1}{25}t}}{50}$$

$$0,5 = \frac{50\left(1 - e^{-\frac{1}{25}t}\right)}{50}$$

$$0,5 = 1 - e^{-\frac{1}{25}t}$$

$$e^{-\frac{1}{25}t} = 1 - 0,5$$

$$e^{-\frac{1}{25}t} = 0,5$$

$$\ln e^{-\frac{1}{25}t} = \ln 0,5$$

$$-\frac{1}{25}t \ln e = \ln 0,5$$

$$t \cdot 1 = -25 \ln 0,5$$

$$t = -25 \ln 0,5$$

$$\boldsymbol{t \approx 17,33}$$

El tiempo que debe transcurrir para que la mezcla del tanque tenga una concentración de 0,5 libra de sal por galón es aproximadamente 17,33 minutos.

c. ¿Cuál es la concentración de sal después de un tiempo largo?

Para hallar la concentración de sal después de un tiempo largo, la podemos denotar y calcular como sigue:

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{50 - 50e^{-\frac{1}{25}t}}{50}$$

$$C(t) = \frac{50\left(1 - e^{-\frac{1}{25}t}\right)}{50}$$

$C(t) = 1 - e^{-\frac{1}{25}t}$

$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-\frac{1}{25}t}\right)$

$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} 1 - \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{1}{25}t}$

$\lim_{t\to\infty} C(t) = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{25}t}}$

$\lim_{t\to\infty} C(t) = 1 - \frac{\lim_{t\to\infty} 1}{\lim_{t\to\infty} e^{\frac{1}{25}t}}$

$\lim_{t\to\infty} C(t) = 1 - \frac{1}{\infty}$

$\lim_{t\to\infty} C(t) = 1 - 0$

$\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} C(t) = 1}$

La concentración de sal después de un tiempo largo es 1 libra de sal por galón.

d. Determine la concentración de sal en el tanque, cuando haya pasado una hora y media.

Como nos preguntan la concentración de sal en tanque después de una hora y media, ese tiempo lo debemos tener en minutos. Por lo tanto, una hora y media es igual a noventa minutos.

$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$

$C(t) = \frac{50 - 50e^{-\frac{1}{25}t}}{50}$

$C(t) = \frac{50\left(1 - e^{-\frac{1}{25}t}\right)}{50}$

$C(t) = 1 - e^{-\frac{1}{25}t}$

$C(90) = 1 - e^{-\frac{1}{25}\cdot 90}$

$\boldsymbol{C(90) \approx 0,97\ lb/gal}$

11. Se bombea cerveza con un contenido de 8% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 500 galones de cerveza con 6% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior a razón de 5 galones por minuto, en tanto que el líquido mezclado se extrae del tanque a razón de 6 galones por minuto.

a. ¿Qué cantidad de alcohol hay en el tanque después de t minutos?

b. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de 1 hora?

Resolución:

Datos:

$C_1 = 8\%$ $\quad$ $R_e = 5\ gal/min$

$V = 500\ gal$ $\quad$ $R_s = 6\ gal/min$

$C_0 = 6\%$ $\quad$ $C_2 = \dfrac{x}{V(t)}$

Inicialmente el tanque está con 500 gal de cerveza, por lo que en el instante $t = 0$, el tanque contiene cierto porcentaje de alcohol, es decir, $C_0 = 6\%$. Para determinar la cantidad de alcohol en cero minutos, está dada de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x_0 = V_0 \cdot C_0}$, sustituyendo los valores, tenemos:

$x_0 = V_0 \cdot C_0$

$x_0 = 500(6\%)$

$x_0 = 500\left(\frac{6}{100}\right)$

$x_0 = 30$

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 30$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$ donde x es la cantidad de alcohol (gal) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 500 + (5 - 6)t$

$V(t) = 500 + (-1)t$

$V(t) = 500 - t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{500 - t}\,\frac{gal}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 500 - t$, esto se debe a que el flujo de entrada es menor que el flujo de salida; por lo que se pierde un galón de líquido en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es menor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de galones de alcohol en un tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto al tiempo.

$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$

$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$

$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$

$\frac{dx}{dt} = (5\ gal/min)(8\%\ gal/gal) - (6\ gal/min)\left(\frac{x}{500-t}\ gal/gal\right)$

$\frac{dx}{dt} = (5\ gal/min)\left(\frac{8}{100}\ gal/gal\right) - (6\ gal/min)\left(\frac{x}{500-t}\ gal/gal\right)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}\ \frac{gal}{min} - \frac{6x}{500-t}\ \frac{gal}{min}$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5} - \frac{6x}{500-t}; \qquad x(0) = 30$

$\frac{dx}{dt} + \frac{6}{500-t}x = \frac{2}{5}$, la ED es lineal en x.

$\frac{dx}{dt} + \frac{6x}{500-t} - \frac{2}{5} = 0$

$dx + \left(\frac{6x}{500-t} - \frac{2}{5}\right)dt = 0 \quad (*)$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$\frac{1}{(500-t)^6}\left[dx + \left(\frac{6x}{500-t} - \frac{2}{5}\right)dt\right] = 0 \cdot \frac{1}{(500-t)^6}$

$\frac{1}{(500-t)^6}dx + \frac{1}{(500-t)^6}\left(\frac{6x}{500-t} - \frac{2}{5}\right)dt = 0$

$\frac{1}{(500-t)^6}dx + \frac{6x}{(500-t)^7}dt - \frac{2}{5(500-t)^6}dt = 0$

$d\left[\frac{x}{(500-t)^6}\right] + d\left[-\frac{2}{25(500-t)^5}\right] = d(K)$

$\int d\left[\frac{x}{(500-t)^6}\right] + \int d\left[-\frac{2}{25(500-t)^5}\right] = \int d(K)$

$\frac{x}{(500-t)^6} - \frac{2}{25(500-t)^5} = K$

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$, $x = 30$.

$\frac{30}{(500-0)^6} - \frac{2}{25(500-0)^5} = K$

$\frac{30}{(500)^6} - \frac{2}{25(500)^5} = K$

$\frac{1}{(500)^6}\left(30 - \frac{2}{25} \cdot 500\right) = K$

Factor integrante.

$x(t) = \frac{6}{500-t}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{6}{500-t}dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{-6\int \frac{-1}{500-t}dt}$

$\boldsymbol{P} = e^{-6\ln(500-t)}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{6\ln(500-t)}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln(500-t)^6}}$

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{(500-t)^6}$

$$\frac{1}{(500)^6}(30 - 2 \cdot 20) = K$$

$$\frac{1}{(500)^6}(30 - 40) = K$$

$$\frac{1}{(500)^6}(-10) = K$$

$$-\frac{10}{(500)^6} = K \quad \rightarrow \quad K = -\frac{10}{(500)^6}$$

Despejando x, tenemos:

$$\frac{x}{(500-t)^6} - \frac{2}{25(500-t)^5} = -\frac{10}{(500)^6}$$

$$\frac{x}{(500-t)^6} = \frac{2}{25(500-t)^5} - \frac{10}{(500)^6}$$

$$x = (500 - t)^6 \left[\frac{2}{25(500-t)^5} - \frac{10}{(500)^6}\right]$$

$$x = \frac{2}{25(500-t)^5}(500 - t)^6 - \frac{10}{(500)^6}(500 - t)^6$$

$$x = \frac{2}{25}(500 - t) - 10\left(\frac{500-t}{500}\right)$$

Luego, la cantidad de alcohol (gal) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{2}{25}(500 - t) - 10\left(\frac{500-t}{500}\right)}$$

Respondiendo las preguntas.

a. ¿Qué cantidad de alcohol hay en el tanque después de t minutos?

La cantidad de alcohol que hay en el tanque después de t minutos es:

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{2}{25}(500 - t) - 10\left(\frac{500-t}{500}\right)}$$

b. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de 1 hora?

Lo que se pide es la concentración de alcohol en una hora lo que equivale sesenta minutos.

$$C(t)=\frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t)=\frac{\frac{2}{25}(500-t)-10\left(\frac{500-t}{500}\right)^{6}}{500-t}$$

$$C(60)=\frac{\frac{2}{25}(500-60)-10\left(\frac{500-60}{500}\right)^{6}}{500-60}$$

$$C(60)=\frac{\frac{2}{25}(440)-10\left(\frac{440}{500}\right)^{6}}{440}$$

$$C(60)=\frac{\frac{176}{5}-10\left(\frac{22}{25}\right)^{6}}{440}$$

$$C(60)\approx 0{,}0694$$

$$\boldsymbol{C(60)\approx 6{,}94}\%$$

El porcentaje de alcohol que hay en el tanque después de una hora es aproximadamente 6,94%.

12. Una alberca cuyo volumen es de 10 000 galones contiene agua con cloro al 0,01%. A partir del instante $t=0$, se bombea agua del servicio público con cloro al 0,001% hacia la alberca, razón de 5 galones por minuto. El agua sale de la alberca con la misma razón.

a. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la alberca después de una hora?

b. ¿En qué momento el agua de la alberca tendrá 0,002% de cloro?

c. ¿Qué cantidad de cloro habrá en la alberca cuando transcurre 6 horas?

Resolución:

Datos:

$V = 10\ 000\ gal$ $\quad R_e = 5\ gal/min$

$C_0 = 0{,}01\%$ $\quad R_s = 5\ gal/min$

$C_1 = 0{,}001\%$ $\quad C_2 = \frac{x}{V(t)}$

Inicialmente la alberca está con 10 000 gal de agua con cloro, por lo que en el instante $t = 0$, la alberca contiene cierto porcentaje de cloro, es decir, $C_0 = 0{,}01\%$. Para determinar la cantidad de cloro en cero minutos, está dada de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x_0 = V_0 \cdot C_0}$, sustituyendo los valores, tenemos:

$x_0 = V_0 \cdot C_0$

$x_0 = (10\ 000)(0{,}01\%)$

$x_0 = (10\ 000)\left(\frac{1}{10\ 000}\right)$

$x_0 = 1$

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 1$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de cloro (gal) que hay en la alberca en tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 10\ 000 + (5 - 5)t$

$V(t) = 10\ 000 + (0)t$

$V(t) = 10\ 000 + 0$

$V(t) = 10\ 000$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{10\,000}\,\frac{gal}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t)$ es el mismo que el volumen inicial, esto se debe a que el flujo de entrada es el mismo que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana galones de cloro en la alberca. Entonces el volumen permanece constante.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de cloro en un tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (5\ gal/min)(0{,}001\%\ gal/gal) - (5\ gal/min)\left(\frac{x}{10\,000}\ gal/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (5\ gal/min)\left(\frac{1}{100\,000}\ gal/gal\right) - (5\ gal/min)\left(\frac{x}{10\,000}\ gal/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20\,000}\,\frac{gal}{min} - \frac{x}{2\,000}\,\frac{gal}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20\,000} - \frac{x}{2000}\ ; \qquad x(0) = 1$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2\,000}x = \frac{1}{20\,000}$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2\,000}x - \frac{1}{20\,000} = 0$$

$dx+\left(\frac{x}{2\,000}-\frac{1}{20\,000}\right)dt=0 \quad (*)$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$e^{\frac{1}{2\,000}t}\left[dx+\left(\frac{x}{2\,000}-\frac{1}{20\,000}\right)dt\right]=0\cdot e^{\frac{1}{2\,000}t}$

$e^{\frac{1}{2\,000}t}dx+e^{\frac{1}{2\,000}t}\left(\frac{x}{2\,000}-\frac{1}{20\,000}\right)d=0$

$e^{\frac{1}{2\,000}t}dx+\frac{x}{2\,000}e^{\frac{1}{2\,000}t}dt-\frac{1}{20\,000}e^{\frac{1}{2\,000}t}dt=0$

$d\left(xe^{\frac{1}{2\,000}t}\right)-d\left(\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}t}\right)=d(K)$

$\int d\left(xe^{\frac{1}{2\,000}t}\right)-\int d\left(\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}t}\right)=\int d(K)$

$xe^{\frac{1}{2\,000}t}-\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}t}=K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t=0$, $x=1$.

$1\cdot e^{\frac{1}{2\,000}\cdot 0}-\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}\cdot 0}=K$

$e^{\frac{1}{2\,000}\cdot 0}-\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}\cdot 0}=K$

$1-\frac{1}{10}e^{0}=K$

$1-\frac{1}{10}=K$

$\frac{9}{10}=K \quad \rightarrow \quad K=\frac{9}{10}$

Despejando x, tenemos:

$xe^{\frac{1}{2\,000}t}-\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}t}=\frac{9}{10}$

$xe^{\frac{1}{2\,000}t}=\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}t}+\frac{9}{10}$

Factor integrante.

$x(t)=\frac{1}{2\,000}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int x(t)dt}$

$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{2\,000}dt}$

$\boldsymbol{P}=e^{\frac{1}{2\,000}\int dt}$

$\boldsymbol{P}=e^{\frac{1}{2\,000}t}$

$$x = \frac{\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}t} + \frac{9}{10}}{e^{\frac{1}{2\,000}t}}$$

$$x = \frac{\frac{1}{10}e^{\frac{1}{2\,000}t}}{e^{\frac{1}{2\,000}t}} + \frac{\frac{9}{10}}{e^{\frac{1}{2\,000}t}}$$

$$x = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}$$

Luego, la cantidad de cloro (gal) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}}$$

Respondiendo las preguntas.

a. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la alberca después de una hora?

Para saber el porcentaje de cloro, usamos la fórmula de concentración, además tiempo tiene que estar en minutos. Por lo que una hora equivale a sesenta minutos.

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}}{10\,000}$$

$$C(60) = \frac{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}\cdot 60}}{10\,000}$$

$$C(60) = 0{,}00009734$$

$$\boldsymbol{C(60) \approx 0{,}0097}\%$$

El porcentaje de cloro que hay en la alberca después de una hora es aproximadamente $0{,}0097\%$.

b. ¿En qué momento el agua de la alberca tendrá 0,002% de cloro?

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}}{10\,000}$$

$$0{,}002\% = \frac{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}}{10\,000}$$

$$\frac{1}{50\,000} = \frac{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}}{10\,000}$$

$$\frac{1}{50\,000} \cdot 10\,000 = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\,000}t}$$

$$\frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2000}t} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2000}t} = \frac{1}{10}$$

$$e^{-\frac{1}{2000}t} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9}$$

$$e^{-\frac{1}{2000}t} = \frac{1}{9}$$

$$\ln e^{-\frac{1}{2000}t} = \ln\frac{1}{9}$$

$$-\frac{1}{2000}t \ln e = \ln\frac{1}{9}$$

$$t = -2000 \ln\frac{1}{9}$$

$$t = 4\,394{,}449155$$

Convertimos ese tiempo en hora, tenemos:

$$4\ 394,449155\ min\left(\frac{1\ h}{60\ min}\right) \approx 73,24\ h$$

El agua de la alberca tendrá 0,002% de cloro en un momento aproximado de 73, 24 horas.

c. ¿Qué cantidad de cloro habrá en la alberca cuando transcurre 6 horas?

Convertimos 6 horas en minutos.

$$6\ h\left(\frac{60\ min}{1\ h}\right) = 360\ min$$

$$x(t) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\ 000}t}$$

$$x(360) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2\ 000}\cdot 360}$$

$$\boldsymbol{x(360) \approx 0,8517\ gal}$$

En la alberca habrá aproximadamente 0, 8517 galones de cloro cuando transcurre 6 horas.

13. Se bombea aire con un contenido de 0,06% de dióxido de carbono a una habitación de 16 por 20 por 25 pies. La rapidez con que el aire se bombea es 2000 pies cúbicos por minuto; después el aire circula y se bombea hacia afuera con la misma rapidez. Si hay una concentración inicial de 0,2% de dióxido de carbono, determine la cantidad que habrá posteriormente en la habitación en un instante t.

a. ¿Cuál es la concentración después de 10 minutos?

b. ¿Cuál es la concentración de dióxido de carbono correspondiente al estado estacionario o estado de equilibrio?

Resolución:

Datos:

Las dimensiones de la habitación son 16 por 20 por 25 pies. Con esta información podemos calcular el volumen de la habitación, así:

$V_0 = (largo)(ancho)(alto)$

$V_0 = (16\, pies)(20\, pies)(25\, pies)$

$V_0 = 8\,000\, pies^3$

$C_1 = 0{,}06\%$ $C_0 = 0{,}2\%$

$R_e = 2\,000\, pies^3/min$ $C_2 = \dfrac{x}{V(t)}$

$R_s = 2\,000\, pies^3/min$

Para determinar la condición inicial del problema, sabemos que la habitación tiene concentración inicial 0,2% de dióxido de carbono, esto ocurre en $t = 0$. Procedemos a calcular la cantidad de dióxido de carbono cuando hay un volumen inicial de aire:

$x_0 = V_0 \cdot C_0$

$x_0 = (8\,000)(0{,}2\%)$

$x_0 = (8\,000)\left(\dfrac{1}{500}\right)$

$x_0 = 16$

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 16$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de dióxido de carbono (pies^3) que hay en la habitación en un tiempo t y $V(t)$ volumen de aire en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 8\,000 + (2\,000 - 2\,000)t$

$V(t) = 8\,000 + (0)t$

$V(t) = 8\,000 + 0$

$V(t) = 8\,000$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$C_2 = \frac{x}{8\,000}\,\frac{pies^3}{pies^3}$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 8\,000$, esto se debe a que el flujo de entrada es igual que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana pies cúbicos de aire en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es igual que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de dióxido de carbono en un instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (2\,000\,pies^3/min)(0{,}06\%\,pies^3/pies^3) - (2\,000\,pies^3/min)\left(\frac{x}{8\,000}\,pies^3/pies^3\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (2\,000\,pies^3/min)\left(\frac{3}{5\,000}\,pies^3/pies^3\right) - (2\,000\,pies^3/min)\left(\frac{x}{8\,000}\,pies^3/pies^3\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{5}\,\frac{pies^3}{min} - \frac{x}{4}\,\frac{pies^3}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{5} - \frac{x}{4}; \qquad x(0) = 16$$

$\frac{dx}{dt}+\frac{1}{4}x=\frac{6}{5}$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt}+\frac{1}{4}x-\frac{6}{5}=0$$

$$dx+\left(\frac{1}{4}x-\frac{6}{5}\right)dt=0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$e^{\frac{1}{4}t}\left[dx+\left(\frac{1}{4}x-\frac{6}{5}\right)dt\right]=0\cdot e^{\frac{1}{4}t}$$

$$e^{\frac{1}{4}t}dx+e^{\frac{1}{4}t}\left(\frac{1}{4}x-\frac{6}{5}\right)dt=0$$

$$e^{\frac{1}{4}t}dx+\frac{x}{4}e^{\frac{1}{4}t}dt-\frac{6}{5}e^{\frac{1}{4}t}dt=0$$

$$d\left(xe^{\frac{1}{4}t}\right)-d\left(\frac{24}{5}e^{\frac{1}{4}t}\right)=d(K)$$

$$\int d\left(xe^{\frac{1}{4}t}\right)-\int d\left(\frac{24}{5}e^{\frac{1}{4}t}\right)=\int d(K)$$

$xe^{\frac{1}{4}t}-\frac{24}{5}e^{\frac{1}{4}t}=K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t=0$, $x=16$.

$$16e^{\frac{1}{4}\cdot 0}-\frac{24}{5}e^{\frac{1}{4}\cdot 0}=K$$

$$16e^{0}-\frac{24}{5}e^{0}=K$$

$$16\cdot 1-\frac{24}{5}\cdot 1=K$$

$$16-\frac{24}{5}=K$$

$$\frac{56}{5}=K \quad \rightarrow \quad K=\frac{56}{5}$$

Despejando x, tenemos:

Factor integrante.

$$x(t)=\frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{1}{4}dt}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\frac{1}{4}\int dt}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\frac{1}{4}t}$$

$$xe^{\frac{1}{4}t} - \frac{24}{5}e^{\frac{1}{4}t} = \frac{56}{5}$$

$$xe^{\frac{1}{4}t} = \frac{24}{5}e^{\frac{1}{4}t} + \frac{56}{5}$$

$$xe^{\frac{1}{4}t} = 4{,}8e^{\frac{1}{4}t} + 11{,}2$$

$$x = \frac{4{,}8e^{\frac{1}{4}t} + 11{,}2}{e^{\frac{1}{4}t}}$$

$$x = \frac{4{,}8e^{\frac{1}{4}t}}{e^{\frac{1}{4}t}} + \frac{11{,}2}{e^{\frac{1}{4}t}}$$

$$x = 4{,}8 + 11{,}2e^{-\frac{1}{4}t}$$

Luego, la cantidad de dióxido de carbono (pies^3) que hay en la habitación en un instante t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = 4{,}8 + 11{,}2e^{-\frac{1}{4}t}}$$

Respondiendo las preguntas.

a. ¿Cuál es la concentración después de 10 minutos?

La ecuación de la concentración en un instante está dada por:

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{4{,}8 + 11{,}2e^{-\frac{1}{4}t}}{8\,000}$$

$$C(10) = \frac{4{,}8 + 11{,}2e^{-\frac{1}{4}\cdot 10}}{8\,000}$$

$$C(10) \approx 0{,}00071$$

$\boldsymbol{C(10) \approx 0,071\%}$

La concentración después de 10 minutos es aproximadamente 0,071%.

b. ¿Cuál es la concentración de dióxido de carbono correspondiente al estado estacionario o estado de equilibrio?

Para saber el estado estacionario o estado de equilibrio, no da ese tiempo de calcular la concentración.

El término "estado estacionario" o "estado de equilibrio" se refiere a una condición en la que un sistema se mantiene constante a lo **largo del tiempo**, en ausencia de perturbaciones externas. Entonces calculamos la concentración como límite cuando t tiende al infinito, así:

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{4{,}8 + 11{,}2e^{-\frac{1}{4}t}}{8\ 000}$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{4{,}8}{8\ 000} + \frac{11{,}2e^{-\frac{1}{4}t}}{8\ 000}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{4{,}8}{8\ 000} + \lim_{t\to\infty} \frac{11{,}2e^{-\frac{1}{4}t}}{8\ 000}$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{4{,}8}{8\ 000} + \frac{\lim_{t\to\infty} \frac{11{,}2}{e^{\frac{1}{4}t}}}{\lim_{t\to\infty} 8\ 000}$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{3}{5\ 000} + \frac{\frac{\lim_{t\to\infty} 11{,}2}{\lim_{t\to\infty} e^{\frac{1}{4}t}}}{8\ 000}$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{3}{5\ 000} + \frac{\frac{11{,}2}{\infty}}{8\ 000}$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{3}{5\,000} + \frac{0}{8\,000}$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{3}{5\,000} + 0$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{3}{5\,000}$$

$\lim_{t\to\infty} C(t) = 0{,}0006$, multiplicando por 100%.

$$\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} C(t) = 0{,}06\%}$$

La concentración de dióxido de carbono correspondiente al estado estacionario o estado de equilibrio es de 0,06%.

14. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 litros de agua en los cuales hay 10 libras de sal disuelta. Una salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ libra de sal por litro se bombea al tanque con una rapidez de 6 litros por minuto. La solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera del tanque con una rapidez de 4 litros por minuto.

a. Calcular el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

Resolución:

Datos:

$V = 100\ lt$ $\qquad$ $R_e = 6\ lt/min$

$x_0 = 10\ lb\ de\ sal$ $\qquad$ $R_s = 4\ lt/min$

$C_1 = \frac{1}{2}\ lb/lt$ $\qquad$ $C_2 = \frac{x}{V(t)}$

Inicialmente el tanque está parcialmente lleno con 100 lt de agua, por lo que en el instante $t = 0$, hay 10 libras de sal. Nuestra condición inicial es $x(0) = 10$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 100 + (6 - 4)t$

$V(t) = 100 + (2)t$

$V(t) = 100 + 2t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$C_2 = \frac{x}{100+2t} \frac{lb}{lt}$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 100 + 2t$, esto se debe a que el flujo de entrada es mayor que el flujo de salida; por lo que se gana dos litros de agua en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es mayor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal en un tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (6\ lt/min)\left(\frac{1}{2}\ lb/lt\right) - (4\ lt/min)\left(\frac{x}{100 + 2t}\ lb/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\ \frac{lb}{min} - \frac{4x}{100 + 2t}\ \frac{lb}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\ \frac{lb}{min} - \frac{4x}{2(50+t)}\ \frac{lb}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\ \frac{lb}{min} - \frac{2x}{50+t}\ \frac{lb}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = 3 - \frac{2x}{50+t}; \quad x(0) = 10$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{50+t}x = 3$, la ED es lineal en x.

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{2}{50+t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{2}{50+t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{2\int \frac{1}{50+t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{2\ln(50+t)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(50+t)^2}$$

$$\boldsymbol{P} = (50+t)^2$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{50+t} - 3 = 0$$

$$dx + \left(\frac{2x}{50+t} - 3\right)dt = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(50+t)^2\left[dx + \left(\frac{2x}{50+t} - 3\right)dt\right] = 0 \cdot (50+t)^2$$

$$(50+t)^2 dx + (50+t)^2\left(\frac{2x}{50+t} - 3\right)dt = 0$$

$$(50+t)^2 dx + +2x(50+t)dt - 3(50+t)^2 dt = 0$$

$$d[x(50+t)^2] - d[(50+t)^3] = d(K)$$

$$\int d[x(50+t)^2] - \int d[(50+t)^3] = \int d(K)$$

$x(50+t)^2 - (50+t)^3 = K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular para $t = 0$, $x = 10$.

$$10(50+0)^2 - (50+0)^3 = K$$

$$10(50)^2 - (50)^3 = K$$

$$(50)^2(10 - 50) = K$$

$$(50)^2(-40) = K \quad \rightarrow \quad K = -40(50)^2$$

Despejando x, tenemos:

$$x(50+t)^2-(50+t)^3=-40(50)^2$$

$$x(50+t)^2=-40(50)^2+(50+t)^3$$

$$x=\frac{-40(50)^2+(50+t)^3}{(50+t)^2}$$

$$x=-\frac{40(50)^2}{(50+t)^2}+\frac{(50+t)^3}{(50+t)^2}$$

$$x=-40\left(\frac{50}{50+t}\right)^2+50+t$$

$$x=50+t-40\left(\frac{50}{50+t}\right)^2$$

Luego, la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t)=50+t-40\left(\frac{50}{50+t}\right)^2}$$

Respondiendo la pregunta.

Calcular el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

$$x(t)=50+t-40\left(\frac{50}{50+t}\right)^2;\quad t=30$$

$$x(30)=50+30-40\left(\frac{50}{50+30}\right)^2$$

$$x(30)=80-40\left(\frac{50}{80}\right)^2$$

$$x(30)=80-40\left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$x(30)=80-40\left(\frac{25}{84}\right)$$

$$\boldsymbol{x(30)=64{,}375\ lb\ de\ sal}$$

15. Un tanque cuyo volumen es de 6 000 litros está inicialmente lleno hasta el 75% de su capacidad, con una solución en la que hay disueltos 200 kilogramos de sal. Se bombea agua salada con 10 kilogramos de sal por litro al tanque a razón de R_e litros por minutos y la mezcla, que se mantiene homogénea mediante agitación, se extrae a razón de 4 litros por minuto. Si se sabe que al cabo de 3 horas y 20 minutos hay 800 litros más de solución en el tanque, determine:

a. El flujo de entrada R_e.

b. La cantidad de sal en el tanque al cabo de cuatros horas.

c. Cantidad de sal y concentración de sal al momento justo de comenzar a desbordarse.

Resolución:

Datos:

$V_T = 6\,000\ lt$	$R_e = ?$
$x_0 = 200\ kg$	$R_s = 4\ lt/min$
$C_1 = 10\ kg/lt$	$C_2 = \frac{x}{V(t)}$

El tanque tiene una capacidad de 6 000 litros, inicialmente el tanque tiene 75% de su capacidad; por lo que matemáticamente se traduce de la siguiente igualdad:

$$V_0 = V_T \cdot 75\%$$

$$V_0 = (6\,000)\left(\frac{75}{100}\right)$$

$$V_0 = 4\,500\ lt$$

El volumen de un líquido en un instante t, viene dado de la siguiente fórmula:

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$, a partir de está podemos calcular el flujo de entrada. Ya que el problema nos dice que en 3 horas y 20 minutos hay 800 litros más de solución en el tanque.

Convertimos las 3 horas en minutos y luego le sumamos 20 minutos.

$3\,h \;\; \rightarrow \;\; min$

$3\,h\left(\frac{60\,min}{1\,h}\right) = 180\,min$

Sumamos los 180 minutos y 20 minutos nos da el tiempo total que es 200 minutos.

En ese tiempo hay 800 litros más que la inicial, es decir, sumamos el volumen inicial y los 800 litros, tenemos: 4 500 litros más 800 litros es igual a 5 300 litros en 200 minutos.

Calculamos el flujo de entrada.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$5\,300 = 4\,500 + (R_e - 4)200$

$5\,300 - 4\,500 = (R_e - 4)200$

$800 = (R_e - 4)200$

$\frac{800}{200} = R_e - 4$

$4 = R_e - 4$

$4 + 4 = R_e$

$8 = R_e \quad \rightarrow \quad R_e = 8\,lt/min$

Para la condición inicial, el problema nos dice que en $t = 0$, hay 200 kilogramos de sal.

$x(0) = 200.$

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal (kg) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen del tanque en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 4\,500 + (8 - 4)t$

$V(t) = 4\,500 + (4)t$

$V(t) = 4\,500 + 4t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{4\,500 + 4t}\,\frac{kg}{lt}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 4\,500 + 4t$, esto se debe a que el flujo de entrada es mayor que el flujo de salida; por lo que se gana cuatros galones en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es mayor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal que hay en tanque en un tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (8\ lt/min)(10\ kg/lt) - (4\ lt/min)\left(\frac{x}{4\,500 + 4t}\ kg/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 80\ \frac{kg}{min} - \frac{4x}{4\,500 + 4t}\ \frac{kg}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 80\ \frac{kg}{min} - \frac{4x}{4(1\,125 + t)}\ \frac{kg}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 80\ \frac{kg}{min} - \frac{x}{1\,125 + t}\ \frac{kg}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = 80\ - \frac{x}{1\,125 + t}; \qquad x(0) = 200$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{1\,125+t}x = 80$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{1\,125+t}x - 80 = 0$$

$$dx + \left(\frac{1}{1\,125+t}x - 80\right)dt = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(1\,125+t)\left[dx + \left(\frac{1}{1\,125+t}x - 80\right)dt\right] = 0 \cdot (1\,125+t)$$

$$(1\,125+t)dx + (1\,125+t)\left(\frac{1}{1\,125+t}x - 80\right)dt = 0$$

$$(1\,125+t)dx + xdt - 80(1\,125+t)dt = 0$$

$$(1\,125+t)dx + xdt - 90\,000dt - 80tdt = 0$$

$$d[x(1\,125+t)] - d(90\,000t) - d(40t^2) = d(K)$$

$$\int d[x(1\,125+t)] - \int d(90\,000t) - \int d(40t^2) = \int d(K)$$

$x(1\,125+t) - 90\,000t - 40t^2 = K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$, $x = 200$.

$$200(1\,125+0) - 90\,000(0) - 40(0)^2 = K$$

$$200(1\,125) - 0 - 0 = K$$

$$225\,000 = K \quad \rightarrow \quad K = 225\,000$$

Despejando x, tenemos:

$$x(1\,125+t) - 90\,000t - 40t^2 = 225\,000$$

$$x(1\,125+t) = 40t^2 + 90\,000t + 225\,000$$

$$x = \frac{40t^2 + 90\,000t + 225\,000}{1\,125+t}$$

Luego, la cantidad de sal (kg) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{1}{1\,125+t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{1\,125+t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(1\,125+t)}$$

$$\boldsymbol{P} = 1\,125+t$$

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{40t^2 + 90\ 000t + 225\ 000}{1\ 125 + t}}$$

Respondiendo las preguntas.

a. El flujo de entrada R_e.

El flujo de entrada R_e es $\boldsymbol{R_e = 8\ lt/min}$.

b. La cantidad de sal en el tanque al cabo de cuatros horas.

$4\ h \ \rightarrow \ min$

$4\ h\left(\frac{60\ min}{1\ h}\right) = 240\ min$

$$x(t) = \frac{40t^2 + 90\ 000t + 225\ 000}{1\ 125 + t}$$

$$x(240) = \frac{40(240)^2 + 90\ 000(240) + 225\ 000}{1\ 125 + 240}$$

$\boldsymbol{x(240) \approx 17\ 676{,}92\ kg\ de\ sal}$

c. Cantidad de sal y concentración de sal al momento justo de comenzar a desbordarse.

Cuando el tanque comienza a desbordarse llega a 6 000 litros información del problema.

$V(t) = 4\ 500 + 4t$

$6\ 000 = 4\ 500 + 4t$

$6\ 000 - 4\ 500 = 4t$

$1\ 500 = 4t$

$\frac{1\ 500}{4} = t$

$375 = t$

$t = 375$

Sustituyendo 375 minutos en la ecuación $x(t)$, se obtiene:

$$x(375) = \frac{40(375)^2 + 90\,000(375) + 225\,000}{1\,125 + 375}$$

$$\boldsymbol{x(375) = 26\,400\ \ kg\ de\ sal}$$

Ahora calculamos la concentración en 375 minutos.

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{\frac{40t^2 + 90\,000t + 225\,000}{1\,125 + t}}{4\,500 + 4t}$$

$$C(375) = \frac{\frac{40(375)^2 + 90\,000(375) + 225\,000}{1\,125 + 375}}{4\,500 + 4(375)}$$

$$\boldsymbol{C(375) = 4{,}4\ kg/lt}$$

16. La sangre conduce un medicamento a un órgano a razón de 3 centímetros cúbicos por segundo y sale con la misma razón. El órgano tiene un volumen líquido de 125 centímetros cúbicos. Si la concentración del medicamento en la sangre es de 0,2 gramos por centímetros cúbicos.

a. ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t, si inicialmente no había rastros de dicho medicamento?

b. ¿En qué momento llegará la concentración del medicamento en el órgano a 0,1 gramos por centímetros cúbicos?

Resolución:

Datos:

$R_e = 3\ cm^3/s$ $\quad V = 125\ cm^3$ $\quad C_2 = \frac{x}{V(t)}$

$R_s = 3\ cm^3/s$ $\quad C_1 = 0{,}2\ g/cm^3$

Para determinar la condición inicial de problema, la pregunta (a) nos dice si inicialmente no había rastros de dicho medicamento.

Esto quiere decir que en $t = 0$ no hay medicamento. Entonces $x(0) = 0$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de medicamente (g) que hay en el órgano en un tiempo t y $V(t)$ volumen líquido del órgano en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 125 + (3 - 3)t$

$V(t) = 125 + (0)t$

$V(t) = 125 + 0$

$V(t) = 125$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{125}\frac{g}{cm^3}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 125$, esto se debe a que el flujo de entrada es igual que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana centímetros cúbicos de órgano líquido en cada segundo que transcurre. Entonces el volumen permanece constante.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de medicamento en un instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (3\ cm^3/s)(0{,}2\ g/cm^3) - (3\ cm^3/s)\left(\frac{x}{125}\ g/cm^3\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{5}\ \frac{g}{s} - \frac{3x}{125}\ \frac{g}{s}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{5} - \frac{3x}{125}; \qquad x(0) = 0$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{125}x = \frac{3}{5}$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{125} - \frac{3}{5} = 0$$

$$dx + \left(\frac{3x}{125} - \frac{3}{5}\right)dt = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$e^{\frac{3}{125}t}\left[dx + \left(\frac{3x}{125} - \frac{3}{5}\right)dt\right] = 0 \cdot e^{\frac{3}{125}t}$$

$$e^{\frac{3}{125}t}dx + e^{\frac{3}{125}t}\left(\frac{3x}{125} - \frac{3}{5}\right)dt = 0$$

$$e^{\frac{3}{125}t}dx + \frac{3x}{125}e^{\frac{3}{125}t}dt - \frac{3}{5}e^{\frac{3}{125}t}dt = 0$$

$$d\left(xe^{\frac{3}{125}t}\right) - d\left(25e^{\frac{3}{125}t}\right) = d(K)$$

$$\int d\left(xe^{\frac{3}{125}t}\right) - \int d\left(25e^{\frac{3}{125}t}\right) = \int d(K)$$

$xe^{\frac{3}{125}t} - 25e^{\frac{3}{125}t} = K$, solución general de ED (*). Solución particular para $t = 0, x = 0$.

$$0 \cdot e^{\frac{3}{125}\cdot 0} - 25e^{\frac{3}{125}\cdot 0} = K$$

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{3}{125}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{3}{125}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{3}{125}\int dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{3}{125}t}$$

$0 - 25e^{0} = K$

$-25 \cdot 1 = K$

$-25 = K \quad \rightarrow \quad K = -25$

Despejando x, tenemos:

$xe^{\frac{3}{125}t} - 25e^{\frac{3}{125}t} = -25$

$xe^{\frac{3}{125}t} = 25e^{\frac{3}{125}t} - 25$

$$x = \frac{25e^{\frac{3}{125}t} - 25}{e^{\frac{3}{125}t}}$$

$$x = \frac{25e^{\frac{3}{125}t}}{e^{\frac{3}{125}t}} - \frac{25}{e^{\frac{3}{125}t}}$$

$x = 25 - 25e^{-\frac{3}{125}t}$

Luego, la cantidad de medicamento (g) que hay en el órgano después de t (segundo) es:

$\boldsymbol{x(t) = 25 - 25e^{-\frac{3}{125}t}}$

Respondiendo las preguntas.

a. ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t, si inicialmente no había rastros de dicho medicamento?

La concentración en cualquier tiempo t, está dada por:

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{25 - 25e^{-\frac{3}{125}t}}{125}$$

$$C(t) = \frac{25\left(1 - e^{-\frac{3}{125}t}\right)}{125}$$

$$\boldsymbol{C(t) = \frac{1 - e^{-\frac{3}{125}t}}{5}\ g/cm^3}$$

La concentración del medicamento en el órgano en el instante t es $\frac{1-e^{-\frac{3}{125}t}}{5}\ g/cm^3$.

b. ¿En qué momento llegará la concentración del medicamento en el órgano a 0,1 gramos por centímetros cúbicos?

$$C(t) = 0{,}1$$

$$C(t) = \frac{1 - e^{-\frac{3}{125}t}}{5}$$

$$0{,}1 = \frac{1 - e^{-\frac{3}{125}t}}{5}$$

$$(0{,}1)(5) = 1 - e^{-\frac{3}{125}t}$$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{3}{125}t}$$

$$e^{-\frac{3}{125}t} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$e^{-\frac{3}{125}t} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{-\frac{3}{125}t} = \ln\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{125}t\ln e = \ln\frac{1}{2}$$

$$t \cdot 1 = -\frac{125}{3}\ln\frac{1}{2}$$

$$t = -\frac{125}{3}\ln\frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{t \approx 28,88}$

La concentración del medicamento en el órgano a 0,1 gramos por centímetros cúbicos llegará aproximadamente a 28,88 segundos.

17. Un tanque de 500 litros contiene inicialmente tres quintos de su capacidad en los que hay disueltos 60 gramos de una cierta sustancia química. El líquido que contiene 20 gramos por litro de la sustancia química disuelta entra al tanque con una rapidez de 6 litros por minuto. Mediante agitación la mezcla se mantiene uniforme y estando agitada sale a razón de 4,5 litros por minuto.

a. ¿Qué cantidad de la sustancia química habrá en el tanque en el instante que empieza a desbordarse?

Resolución:

Datos:

$V_T = 500\ lt$ $\qquad R_e = 6\ lt/min$

$x_0 = 60\ g$ $\qquad R_s = 4,5\ lt/min$

$C_1 = 20\ g/lt$ $\qquad C_2 = \frac{x}{V(t)}$

El tanque tiene una capacidad de 500 litros, inicialmente el tanque tiene tres quintos de su capacidad; por lo que matemáticamente se traduce de la siguiente igualdad:

$$V_0 = V_T \cdot \frac{3}{5}$$

$$V_0 = 500 \cdot \frac{3}{5}$$

$$V_0 = 300\ lt$$

Para determinar la condición inicial el problema nos dice que $t = 0$, hay 60 gramos de una cierta sustancia química. Entonces $x(0) = 60$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sustancia química (g) que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de aire en cualquier instante t.

$$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$$

$$V(t) = 300 + (6 - 4{,}5)t$$

$$V(t) = 300 + \left(\frac{3}{2}\right)t$$

$$V(t) = 300 + \frac{3}{2}t$$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{300 + \frac{3}{2}t}\,\frac{g}{lt}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 300 + \frac{3}{2}t$, esto se debe a que el flujo de entrada es mayor que el flujo de salida; por lo que se gana tres medios de litros en el tanque en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es mayor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sustancia química en un tiempo t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (6\ lt/min)(20\ g/lt) - (4{,}5\ lt/min)\left(\frac{x}{300 + \frac{3}{2}t}\ g/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 120\ \frac{g}{min} - \left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{x}{\frac{600 + 3t}{2}}\right)\frac{g}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 120\ \frac{g}{min} - \frac{9x}{600 + 3t}\ \frac{g}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 120\ \frac{g}{min} - \frac{9x}{3(200 + t)}\ \frac{g}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 120\ \frac{g}{min} - \frac{3x}{200 + t}\ \frac{g}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = 120\ - \frac{3x}{200 + t}; \quad x(0) = 60$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{200+t}x = 120$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{200 + t}x - 120 = 0$$

$$dx + \left(\frac{3}{200 + t}x - 120\right)dt = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(200 + t)^3\left[dx + \left(\frac{3}{200 + t}x - 120\right)dt\right] = 0 \cdot (200 + t)^3$$

$$(200 + t)^3 dx + (200 + t)^3\left(\frac{3}{200 + t}x - 120\right)dt = 0$$

$$(200 + t)^3 dx + 3x(200 + t)^2 dt - 120(200 + t)^3 dt = 0$$

$$d[x(200 + t)^3] - d[30(200 + t)^4] = d(K)$$

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{3}{200 + t}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{3}{200+t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{3\int \frac{1}{200+t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{3\ln(200+t)}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\ln(200+t)^3}$$

$$\boldsymbol{P} = (200 + t)^3$$

$$\int d[x(200+t)^3] - \int d[30(200+t)^4] = \int d(K)$$

$x(200+t)^3 - 30(200+t)^4 = K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$, $x = 60$.

$$60(200+0)^3 - 30(200+0)^4 = K$$

$$60(200)^3 - 30(200)^4 = K$$

$$(200)^3(60 - 30 \cdot 200) = K$$

$$(200)^3(60 - 6000) = K$$

$$(200)^3(-5940) = K \quad \rightarrow \quad K = -5940(200)^3$$

Despejando x, tenemos:

$$x(200+t)^3 - 30(200+t)^4 = -5940(200)^3$$

$$x(200+t)^3 = 30(200+t)^4 - 5940(200)^3$$

$$x = \frac{30(200+t)^4 - 5940(200)^3}{(200+t)^3}$$

$$x = \frac{30(200+t)^4}{(200+t)^3} - \frac{5940(200)^3}{(200+t)^3}$$

$$x = 30(200+t) - 5940\left(\frac{200}{200+t}\right)^3$$

Luego, la cantidad de sustancia química (g) que hay en el tanque en un instante t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = 30(200+t) - 5940\left(\frac{200}{200+t}\right)^3}$$

Respondiendo la pregunta.

¿Qué cantidad de la sustancia química habrá en el tanque en el instante que empieza a desbordarse?

El tanque empieza a desbordarse cuando llega a los 500 litros.

$$V(t) = 500$$

$$V(t) = 300 + \frac{3}{2}t$$

$$500 = 300 + \frac{3}{2}t$$

$$500 - 300 = \frac{3}{2}t$$

$$200 = \frac{3}{2}t$$

$$200 \cdot 2 = 3t$$

$$400 = 3t$$

$$\frac{400}{3} = t \quad \rightarrow \quad t = \frac{400}{3}$$

Sustituimos ese tiempo en $x(t)$ para determinar la cantidad de sustancia química, así:

$$x\left(\frac{400}{3}\right) = 30\left(200 + \frac{400}{3}\right) - 5940\left(\frac{200}{200 + \frac{400}{3}}\right)^3$$

$$\boldsymbol{x\left(\frac{400}{3}\right) = 8\,716,96}$$

La cantidad sustancia química que habrá en el tanque en el instante que empieza a desbordarse es de 8 716,96 g de sal.

18. Un depósito contiene 60 litros de una solución compuesta por 70% de agua y 30% de alcohol. Se vierte en el depósito a razón de 3 litros por minuto, una segunda solución que contiene 60% de agua y 40% de alcohol. Al mismo tiempo se vacía el depósito a razón de 5 litros por minuto. Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente.

a. ¿Cuánto alcohol queda en el depósito después de 15 minutos?

b. ¿Qué tiempo tardará en vaciarse el depósito?

c. ¿Cuál es la concentración de alcohol en el depósito después de 20 minutos?

Resolución:

Datos:

$V = 60\ lt$

$C_0 = 30\%$

$R_e = 3\ lt/min$

$C_1 = 40\%$

$R_s = 5\ lt/min$

$C_2 = \frac{x}{V(t)}$

Para determinar la condición inicial del problema, sabemos el depósito ya tenía 30% de alcohol, esto ocurre en $t = 0$. Procedemos a calcular la cantidad de alcohol en el depósito cuando hay un volumen inicial:

$$x_0 = V_0 \cdot C_0$$

$$x_0 = 60 \cdot 30\%$$

$$x_0 = 60 \cdot \frac{30}{100}$$

$$x_0 = 18$$

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0) = 18$.

Para determinar $C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de alcohol (lt) que hay en el depósito en un tiempo t y $V(t)$ volumen del depósito en cualquier instante t.

$$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$$

$V(t) = 60 + (3 - 5)t$

$V(t) = 60 + (-2)t$

$V(t) = 60 - 2t$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{60 - 2t}\,\frac{lt}{lt}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 60 - 2t$, esto se debe a que el flujo de entrada es menor que el flujo de salida; por lo que se pierde dos litros de líquido en cada minuto que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ menor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de alcohol en un instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (3\ lt/min)(40\%\ lt/lt) - (5\ lt/min)\left(\frac{x}{60 - 2t}\ lt/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (3\ lt/min)\left(\frac{40}{100}\ lt/lt\right) - (5\ lt/min)\left(\frac{x}{60 - 2t}\ lt/lt\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{5}\ \frac{lt}{min} - \frac{5x}{60 - 2t}\ \frac{lt}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{5} - \frac{5x}{60-2t}; \quad x(0) = 18$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{5}{60-2t}x = \frac{6}{5}$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{5}{60-2t}x - \frac{6}{5} = 0$$

$$dx + \left(\frac{5}{60-2t}x - \frac{6}{5}\right)dt = 0 \quad (*)$$

Factor integrante.

$x(t) = \frac{5}{60-2t}$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{5}{60-2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{5\int \frac{1}{60-2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{5}{2}\int \frac{-2}{60-2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{-\frac{5}{2}\ln(60-2t)}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\frac{5}{2}\ln(60-2t)}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{e^{\ln(60-2t)^{\frac{5}{2}}}}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$\frac{1}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}\left[dx + \left(\frac{5}{60-2t}x - \frac{6}{5}\right)dt\right] = 0 \cdot \frac{1}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{1}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}dx + \frac{1}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{5}{60-2t}x - \frac{6}{5}\right)dt = 0$$

$$\frac{1}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}dx + \frac{5x}{(60-2t)^{\frac{7}{2}}}dt - \frac{6}{5(60-2t)^{\frac{5}{2}}}dt = 0$$

$$d\left[\frac{x}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}\right] - d\left[\frac{2}{5(60-2t)^{\frac{3}{2}}}\right] = d(K)$$

$$\int d\left[\frac{x}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}\right] - \int d\left[\frac{2}{5(60-2t)^{\frac{3}{2}}}\right] = \int d(K)$$

$\frac{x}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{5(60-2t)^{\frac{3}{2}}} = K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$, $x = 18$.

$$\frac{18}{(60-2\cdot 0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{5(60-2\cdot 0)^{\frac{3}{2}}} = K$$

$$\frac{18}{(60-0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{5(60-0)^{\frac{3}{2}}} = K$$

$$\frac{18}{(60)^{\frac{5}{2}}}-\frac{2}{5(60)^{\frac{3}{2}}}=K$$

$$\frac{1}{(60)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{18}{60}-\frac{2}{5}\right)=K$$

$$\frac{1}{(60)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{1}{10}\right)=K \qquad \rightarrow \qquad K=-\frac{1}{10(60)^{\frac{3}{2}}}$$

Despejando x, tenemos:

$$\frac{x}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}-\frac{2}{5(60-2t)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{10(60)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{x}{(60-2t)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2}{5(60-2t)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{10(60)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x=(60-2t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{5(60-2t)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{10(60)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$x=\frac{2}{5(60-2t)^{\frac{3}{2}}}(60-2t)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{10(60)^{\frac{3}{2}}}(60-2t)^{\frac{5}{2}}$$

$$x=\frac{2}{5}(60-2t)-\frac{60}{10\cdot 60(60)^{\frac{3}{2}}}(60-2t)^{\frac{5}{2}}$$

$$x=\frac{2}{5}(60-2t)-\frac{6}{1\cdot(60)^{\frac{5}{2}}}(60-2t)^{\frac{5}{2}}$$

$$x=\frac{2}{5}(60-2t)-6\left(\frac{60-2t}{60}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Luego, la cantidad de alcohol (lt) que hay en el depósito en un instante t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t)=\frac{2}{5}(60-2t)-6\left(\frac{60-2t}{60}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Respondiendo las preguntas.

a. ¿Cuánto alcohol queda en el depósito después de 15 minutos?

$t = 15 \qquad x(t) = ?$

$$x(t) = \frac{2}{5}(60 - 2t) - 6\left(\frac{60 - 2t}{60}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$x(15) = \frac{2}{5}(60 - 2 \cdot 15) - 6\left(\frac{60 - 2 \cdot 15}{60}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$\boldsymbol{x(15) \approx 10,94}$

Después de 15 minutos queda aproximadamente 10,94 litros de alcohol en el depósito.

b. ¿Qué tiempo tardará en vaciarse el depósito?

El depósito está vacío cuando el volumen es $V(t) = 0\ lt$.

$V(t) = 60 - 2t$

$0 = 60 - 2t$

$2t = 60$

$$t = \frac{60}{2}$$

$\boldsymbol{t = 30}$

El depósito tardará en vaciarse a los 30 minutos.

c. ¿Cuál es la concentración de alcohol en el depósito después de 20 minutos?

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{\frac{2}{5}(60 - 2t) - 6\left(\frac{60 - 2t}{60}\right)^{\frac{5}{2}}}{60 - 2t}$$

$$C(20)=\frac{\frac{2}{5}(60-2\cdot 20)-6\left(\frac{60-2\cdot 20}{60}\right)^{\frac{5}{2}}}{60-2\cdot 20}$$

$C(20)\approx 0{,}3807$, multiplicando por 100%, se obtiene:

$\boldsymbol{C(20)\approx 38{,}07}\%$

19. Suponga que un cuarto contiene 32 metros cúbicos de aire, originalmente libres de monóxido de carbono. En el instante $t=0$ se empieza a introducir al cuarto humo de cigarrillo con un contenido del 4% de monóxido de carbono, con una rapidez de 0,002 metros cúbicos por minuto y se deja salir la mezcla bien circulada, con la misma rapidez.

a. Encuentre una expresión para la concentración de monóxido de carbono en el cuarto, en cualquier instante $t>0$.

b. Para un ser humano, quedar expuesto a una concentración de monóxido de carbono tan bajo como 0,00012 puede ser nocivo. En el tiempo en el cual se alcanza esta concentración.

Resolución:

Datos:

$V=32\ m^3$

$C_1=4\%$

$R_e=0{,}002\ m^3/min$

$R_s=0{,}002\ m^3/min$

$C_2=\frac{x}{V(t)}$

El problema nos dice que el cuarto está libre de monóxido de carbono, es decir, cero monóxidos de carbono en $t=0$.

A partir de este análisis determinamos la condición inicial del problema: $x(0)=0$.

Para determinar $C_2=\frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de monóxido de carbono (m^3) que hay en el cuarto en un tiempo t y $V(t)$ volumen del cuarto en cualquier instante t.

$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$

$V(t) = 32 + (0{,}002 - 0{,}002)t$

$V(t) = 32 + (0{,}002 - 0{,}002)t$

$V(t) = 32 + (0)t$

$V(t) = 32 + 0$

$V(t) = 32$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{32}\,\frac{m^3}{m^3}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t)$ es el mismo que el volumen inicial, esto se debe a que el flujo de entrada es el mismo que el flujo de salida; por lo que no se pierde ni se gana m^3 de aire en el cuarto. Entonces el volumen permanece constante.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de monóxido de carbono en el cuarto en un instante $t > 0$.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (0{,}002\ m^3/min)(4\%\ m^3/m^3) - (0{,}002\ m^3/min)\left(\frac{x}{32}\ m^3/m^3\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (0{,}002\ m^3/min)\left(\frac{4}{100}\ m^3/m^3\right) - (0{,}002\ m^3/min)\left(\frac{x}{32}\ m^3/m^3\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{12\ 500}\frac{m^3}{min} - \frac{x}{16\ 000}\ \frac{m^3}{min}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{12\,500} - \frac{x}{16\,000}; \quad x(0) = 0$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{16\,000}x = \frac{1}{12\,500}$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{16\,000} - \frac{1}{12\,500} = 0$$

$$dx + \left(\frac{x}{16\,000} - \frac{1}{12\,500}\right)dt = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$e^{\frac{1}{16\,000}t}\left[dx + \left(\frac{x}{16\,000} - \frac{1}{12\,500}\right)dt\right] = 0 \cdot e^{\frac{1}{16\,000}t}$$

$$e^{\frac{1}{16\,000}t}dx + e^{\frac{1}{16\,000}t}\left(\frac{x}{16\,000} - \frac{1}{12\,500}\right)dt = 0$$

$$e^{\frac{1}{12\,500}t}dx + \frac{x}{16\,000}e^{\frac{1}{16\,000}t}dt - \frac{1}{12\,500}e^{\frac{1}{16\,000}t}dt = 0$$

$$d\left(xe^{\frac{1}{16\,000}t}\right) - d\left(\frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}t}\right) = d(K)$$

$$\int d\left(xe^{\frac{1}{16\,000}t}\right) - \int d\left(\frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}t}\right) = \int d(K)$$

$xe^{\frac{1}{16\,000}t} - \frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}t} = K$, Solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t = 0$, $x = 0$.

$$0 \cdot e^{\frac{1}{16\,000}\cdot 0} - \frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}\cdot 0} = K$$

$$0 - \frac{32}{25}e^{0} = K$$

$$-\frac{32}{25} \cdot 1 = K \quad \rightarrow \quad K = -\frac{32}{25}$$

Despejando x, tenemos:

Factor integrante.

$$x(t) = \frac{1}{16\,000}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\int \frac{1}{16\,000}dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{16\,000}\int dt}$$

$$\boldsymbol{P} = e^{\frac{1}{16\,000}t}$$

$$xe^{\frac{1}{16\,000}t} - \frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}t} = -\frac{32}{25}$$

$$xe^{\frac{1}{16\,000}t} = \frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}t} - \frac{32}{25}$$

$$x = \frac{\frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}t} - \frac{32}{25}}{e^{\frac{1}{16\,000}t}}$$

$$x = \frac{\frac{32}{25}e^{\frac{1}{16\,000}t}}{e^{\frac{1}{16\,000}t}} - \frac{\frac{32}{25}}{e^{\frac{1}{16\,000}t}}$$

$$x = \frac{32}{25} - \frac{32}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}$$

Luego, la cantidad de monóxido de carbono (m^3) que hay en el cuarto después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{32}{25} - \frac{32}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}}$$

Respondiendo las preguntas.

a. Encuentre una expresión para la concentración de monóxido de carbono en el cuarto, en cualquier instante $t > 0$.

La concentración está dada por la siguiente fórmula:

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$C(t) = \frac{\frac{32}{25} - \frac{32}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}}{32}$$

$$C(t) = \frac{32\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}\right)}{32}$$

$$C(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}$$

La concentración de monóxido de carbono en cualquier instante $t > 0$ es:

$$\boldsymbol{C(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}}$$

b. Para un ser humano, quedar expuesto a una concentración de monóxido de carbono tan bajo como 0,00012 puede ser nocivo. En el tiempo en el cual se alcanza esta concentración.

$$C(t) = 0{,}00012$$

$$C(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}$$

$$0{,}00012 = \frac{1}{25} - \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t}$$

$$\frac{1}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t} = \frac{1}{25} - 0{,}00012$$

$$\frac{1}{25}e^{-\frac{1}{16\,000}t} = \frac{997}{25\,000}$$

$$e^{-\frac{1}{16\,000}t} = \frac{997}{25\,000} \cdot 25$$

$$e^{-\frac{1}{16\,000}t} = \frac{997}{1\,000}$$

$$\ln e^{-\frac{1}{16\,000}t} = \ln \frac{997}{1\,000}$$

$$-\frac{1}{16\,000} t \ln e = \ln \frac{997}{1\,000}$$

$$t \cdot 1 = -16\,000 \ln \frac{997}{1\,000}$$

$$t \approx 48{,}07$$

El tiempo que alcanza la concentración 0,00012 es de aproximadamente 48,07 minutos.

20. Un tanque de 500 galones contiene inicialmente 100 galones de agua, en la cual se han disuelto 50 libras de sal. Comenzando en $t = 0$, una salmuera cuya concentración 2 libras de sal por galón entra al tanque a razón de 5 galones por segundo. La mezcla se mantiene uniforme mediante agitación, y estando bien agitada sale del tanque con una rapidez de 3 galones por segundo. ¿Qué cantidad de sal contendrá el tanque cuando esté lleno de salmuera?

Resolución:

Datos:

$V_T = 500\ gal$ $\qquad$ $R_e = 5\ gal/s$

$V_0 = 100\ gal$ $\qquad$ $R_s = 3\ gal/s$

$C_1 = 2\ lb/gal$ $\qquad$ $C_2 = \frac{x}{V(t)}$

En $t = 0$ hay 50 libras de sal disuelto en el tanque. Con esto tenemos nuestra condición inicial del problema: $x(0) = 50$.

Para determinar$C_2 = \frac{x}{V(t)}$, donde x es la cantidad de sal que hay en el tanque en un tiempo t y $V(t)$ volumen de líquido en cualquier instante t.

$$V(t) = V_0 + (R_e - R_s)t$$

$$V(t) = 100 + (5 - 3)t$$

$$V(t) = 100 + (2)t$$

$$V(t) = 100 + 2t$$

Luego, tenemos la concentración de salida que es:

$$C_2 = \frac{x}{100 + 2t}\ \frac{lb}{gal}$$

Observación: Se observa que el volumen $V(t) = 100 + 2t$, esto se debe a que el flujo de entrada es mayor que el flujo de salida; por lo que se gana dos galones de agua en cada segundo que transcurre. Entonces el volumen $V(t)$ es mayor que V_0.

Ahora si podemos formular la ecuación diferencial para resolver el problema.

x: Cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t.

$\frac{dx}{dt}$: Razón de cambio de x con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = Rapidez\ de\ entrada - Rapidez\ de\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

$$\frac{dx}{dt} = (R_e)(C_1) - (R_s)(C_2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (5\ gal/s)(2\ lb/s) - (3\ gal/s)\left(\frac{x}{100 + 2t}\ lb/gal\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 10\ \frac{lb}{s} - \frac{3x}{100 + 2t}\ \frac{lb}{s}$$

Omitiendo las unidades de la ED y escribiendo la condición inicial del problema.

$$\frac{dx}{dt} = 10\ - \frac{3x}{100 + 2t}; \quad x(0) = 50$$

$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{100+2t} x = 10$, la ED es lineal en x.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100 + 2t} - 10 = 0$$

$$dx + \left(\frac{3x}{100 + 2t} - 10\right) dt = 0 \quad (*)$$

Multiplicamos **P** en la ED (*).

$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}\left[dx+\left(\frac{3x}{100+2t}-10\right)dt\right]=0\cdot(100+2t)^{\frac{3}{2}}$$

$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}dx+(100+2t)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3x}{100+2t}-10\right)dt=0$$

$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}dx+3x(100+2t)^{\frac{1}{2}}dt-10(100+2t)^{\frac{3}{2}}dt=0$$

$$d\left[x(100+2t)^{\frac{3}{2}}\right]-d\left[2(100+2t)^{\frac{5}{2}}\right]=d(K)$$

$$\int d\left[x(100+2t)^{\frac{3}{2}}\right]-\int d\left[2(100+2t)^{\frac{5}{2}}\right]=\int d(K)$$

$x(100+2t)^{\frac{3}{2}}-2(100+2t)^{\frac{5}{2}}=K$, solución general de la ED (*).

Calculamos la solución particular de la ED para $t=0$, $x=50$.

$$50(100+2\cdot 0)^{\frac{3}{2}}-2(100+2\cdot 0)^{\frac{5}{2}}=K$$

$$50(100+0)^{\frac{3}{2}}-2(100+0)^{\frac{5}{2}}=K$$

$$50(100)^{\frac{3}{2}}-2(100)^{\frac{5}{2}}=K$$

$$(100)^{\frac{3}{2}}(50-2\cdot 100)=K$$

$$(100)^{\frac{3}{2}}(50-200)=K$$

$$(100)^{\frac{3}{2}}(-150)=K$$

$$-150(100)^{\frac{3}{2}}=K \quad\rightarrow\quad K=-150(100)^{\frac{3}{2}}$$

Despejando x, tenemos:

$$x(100+2t)^{\frac{3}{2}}-2(100+2t)^{\frac{5}{2}}=-150(100)^{\frac{3}{2}}$$

$$x(100+2t)^{\frac{3}{2}}=2(100+2t)^{\frac{5}{2}}-150(100)^{\frac{3}{2}}$$

Factor integrante.

$$x(t)=\frac{3}{100+2t}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int x(t)dt}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\int\frac{3}{100+2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{3\int\frac{1}{100+2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\frac{3}{2}\int\frac{2}{100+2t}dt}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\frac{3}{2}\ln(100+2t)}$$

$$\boldsymbol{P}=e^{\ln(100+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{P}=(100+2t)^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{2(100+2t)^{\frac{5}{2}} - 150(100)^{\frac{3}{2}}}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = \frac{2(100+2t)^{\frac{5}{2}}}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}} - \frac{150(100)^{\frac{3}{2}}}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = 2(100+2t) - 150\left(\frac{100}{100+2t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Luego, la cantidad de sal (lb) que hay en el tanque después de t (minutos) es:

$$\boldsymbol{x(t) = 2(100+2t) - 150\left(\frac{100}{100+2t}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Respondiendo la pregunta.

¿Qué cantidad de sal contendrá el tanque cuando esté lleno de salmuera?

El tanque está lleno cuando este contenga 500 galones de salmuera.

$V(t) = 500$

$V(t) = 100 + 2t$

$500 = 100 + 2t$

$500 - 100 = 2t$

$400 = 2t$

$\frac{400}{2} = t$

$200 = t$

$t = 200$

En 200 segundos el tanque estará lleno de salmuera.

Evaluamos ese tiempo en la función $x(t)$ para determinar la cantidad de sal.

$$x(t) = 2(100 + 2t) - 150\left(\frac{100}{100 + 2t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x(200) = 2(100 + 2 \cdot 200) - 150\left(\frac{100}{100 + 2 \cdot 200}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x(200) = 2(100 + 400) - 150\left(\frac{100}{100 + 400}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x(200) = 2(500) - 150\left(\frac{100}{500}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x(200) = 1000 - 150\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{x(200) \approx 986,58}$$

La cantidad de sal que contendrá el tanque cuando esté lleno de salmuera es de aproximadamente 986,58 libras de sal.

Conclusión

Considerando lo desarrollado en este proyecto sobre el Solucionario de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones, se derivan las siguientes conclusiones:

- Facilita el aprendizaje: Un solucionario detallado de ecuaciones diferenciales ordinarias proporciona una herramienta valiosa para estudiantes al facilitar el aprendizaje de este tema complejo. Al ofrecer soluciones paso a paso, los estudiantes pueden comprender mejor los conceptos y la metodología detrás de la resolución de ecuaciones diferenciales.
- Enfoque en aplicaciones prácticas: El objetivo general de desarrollar un solucionario detallado con aplicaciones destaca la importancia de conectar la teoría con situaciones prácticas. Esto no solo ayuda a los estudiantes a comprender la utilidad de las ecuaciones diferenciales en el mundo real, sino que también fomenta una comprensión más profunda de los conceptos.
- Herramienta eficiente para la práctica: El solucionario sirve como una herramienta eficiente para la práctica de la resolución de ecuaciones diferenciales. Los estudiantes pueden utilizarlo para mejorar sus habilidades resolviendo problemas adicionales y aplicando los métodos aprendidos. Esto contribuye significativamente al desarrollo de la destreza y confianza en la resolución de este tipo de ecuaciones.
- Promoción de la autonomía del estudiante: Al proporcionar un solucionario detallado, se promueve la autonomía del estudiante. Los alumnos pueden utilizarlo como una referencia independiente para revisar y comprender los conceptos, lo que fomenta el aprendizaje autodirigido y la capacidad de resolver problemas de manera independiente.

Recomendación

A continuación, se ofrecen sugerencias para promover la comprensión y el abordaje efectivo de los problemas planteados en este documento.

- Comprender los fundamentos teóricos: Antes de abordar problemas específicos, es crucial tener una comprensión sólida de los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto incluye entender las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, conocer los métodos de resolución y comprender la teoría detrás de estos métodos.
- Practicar con una variedad de problemas: No te límites a un tipo específico de problema. Practica con una variedad de ecuaciones diferenciales y métodos de solución. Esto te ayudará a desarrollar una habilidad más amplia y a estar preparado para enfrentar desafíos diversos.
- Contextualizar con problemas del mundo real: Relaciona las ecuaciones diferenciales con problemas del mundo real. Muchos fenómenos naturales y procesos en la ciencia pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales: Trayectorias ortogonales y mezclas. Al abordar problemas prácticos, se fortalece la comprensión y se aprecia la utilidad de estos conceptos.

Recuerda que las ecuaciones diferenciales ordinarias son herramientas poderosas y versátiles, y su comprensión profunda puede tener un impacto significativo en diversas disciplinas. Al aplicar estas recomendaciones, podrás desarrollar habilidades más sólidas y apreciar la importancia de las ecuaciones diferenciales en diferentes contextos.

Referencias bibliográficas

Cabrera, R. (2009). *SOLUCIONARIO DE PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.* http://blog.espol.edu.ec/jeissoncastillo/files/2015/05/Folleto-Ec.-Dif.-Roberto-Cabrera.pdf

Carmona Jover , I., y Filio López, E. (2011). *ECUACIONES DIFERENCIALES.* (R. F. Rivera, Ed.) México, México: Pearson Educación México. https://www.elsolucionario.org/ecuaciones-diferenciales-isabel-carmona-jover-5ta-edicion/

Espinoza Ramos , E. (2004). *Ecuaciones diferenciales y aplicaciones para estudiantes de ciencias e ingeniería.* Lima, Perú. https://www.elsolucionario.org/ecuaciones-diferenciales-eduardo/

Gamarra Miranda, A. (2019). *Trayectorias Ortogonales.* https://kupdf.net/download/trayectorias-ortogonales-definicion_5d24b30ce2b6f5463fc32e46_pdf

Melgar Brizuela, J. F. (2004). *"RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN ECUACIONES DIFERENCIALES" UN ENFOQUE HEURISTICO.* https://ri.ues.edu.sv/id/eprint/12442/1/19200775.pdf

Sánchez Pineda, C. A. (1994). *LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN EL CONTEXTO DE SUS APLICACIONES: SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA SU ENSEÑANZA EN EL SISTEMA ITESM.* https://repositorio.tec.mx/handle/11285/632165

Zang, C. M., Fernández Von Metzen, G. A., y León, M. N. (2021). *Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales.* https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12400/pdf

Zill, D. (1986). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* California, Estados Unidos : Grupo Editorial Iberoamérica. https://www.elsolucionario.org/ecuaciones-diferenciales-con-aplicaciones-dennis-g-zill-2da-edicion/